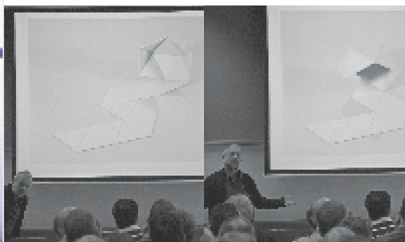
EUCLIDES

vakblad voor de wiskundeleraar

mei 11
nr 6
jaargang 86





Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

COLOFON

mei 11
nr 6
jaargang 86

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394



Inzendingen bijdragen

Artikelen en mededelingen naar de hoofdredacteur: Klaske Blom, Westerdoksdijk 39, 1013 AD Amsterdam
E-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren; op papier in drievoud. Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.
Zie voor nadere aanwijzingen: www.nvvw.nl/euclricht.html

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvvw.nl

Voorzitter

Marian Kollenveld,
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
Tel. (070) 390 70 04
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris

Kees Lagerwaard,
Eindhovensingel 15, 6844 CA Arnhem
Tel. (026) 381 36 46
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie

Elly van Bemmel-Hendriks,
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
Tel. (0321) 31 25 43
E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Postbus 405, 4100 AK Culemborg
Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor
- leden: € 70,00
- leden, maar dan zonder Euclides: € 40,00
- studentleden: € 35,00
- gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 40,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Personen (niet-leden van de NVVW): € 65,00
Instituten en scholen: € 145,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 18,00
Betaling per acceptgiro.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
t.a.v. Sepideh Moosavi
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal
Tel. (0318) 555 075
E-mail: s.moosavi@dekleuver.nl

Kort vooraf

[Klaske Blom]

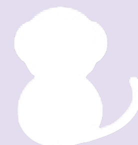
Veren, papier of bytes?
Het lijkt me het meest praktisch in het leven om met de ontwikkelingen mee te gaan. Maar toch… Zou u niet graag een uil zien met een briefje tussen zijn vleugels, die een boodschap in uw tuin of balkon komt afgeven? Mocht u dit achterhaald lijken, bent u dan nog wel gesteld op het papieren tijdperk of neemt u daar inmiddels al afstand van? Ik moet zeggen dat ik nog verknocht ben aan mijn kranten en tijdschriften; zelfs als de informatie reeds ingehaald is door nieuwe feiten als ik me door een stapel van een week heen worstel.
Ik vraag me af hoe erg het is om *Euclides* enige tijd op de stapel 'nog doorkijken' te laten liggen; het lijkt goed mogelijk. Je mist misschien de bijtijdse aankondigingen en bent te laat om je op te geven voor een studiedag, maar de kans is groot dat je dergelijke informatie ook al via een ander kanaal gevonden had. Hoe lang zullen we nog op papier blijven bestaan? Het is een vraag die mijns inziens de komende jaren steeds prangender zal worden, en het antwoord daarop zal afhangen van het doel dat we ons stellen met *Euclides*. Het bestuur organiseert in juni – zie bijgevoegde 'insteker' – een bijeenkomst om kennis te nemen van uw gedachten over dit onderwerp.
Ook 'Twitter' dient zich aan via de NVvW. Doet u het al? Ik ben nog een beetje onzeker over het bijbehorend taalgebruik: twitter ik nou wel of niet als ik gewoon via een website de twitter-berichten lees omdat ik geen twitter-account heb? Twitter ik dan via een website? Of lees ik nog steeds gewoon, en twitter is pas als ik reageer op de oproep 'retweet svp'? Het zou misschien handig geweest zijn als ik al twitterde… dan had ik u, als u tenminste allemaal mijn volgers was geweest, kunnen laten weten dat u het artikel van Joke Verbeek en Gert de Kleuver over de 9e wiskunde-conferentie niet kon vinden in *Euclides* nummer 5, ondanks mijn eerdere aankondiging, maar in het huidige nummer. Of is deze zin te lang voor een 'tweet'?

Gewoon in *Euclides*
Artikelen over wiskunde A en wiskunde C: u vindt een verslag van de Wiskunde C-conferentie die in maart werd gehouden, en waarvoor zoveel belangstelling was dat niet iedereen toegelaten kon worden. Mocht u degene zijn voor wie er geen plaats meer was, dan wordt u via het artikel van Hielke Peereboom alsnog geïnformeerd. Carel van de Giessen bericht over een experiment dat vanuit cTWO gedaan is binnen het domein Statistiek en kans van wiskunde A op de havo. Daniël Kroes schrijft meeslepend over zijn aanpak van een IMO-probleem uit 2010: weer een mooi voorproefje van hetgeen velen van u mee gaan maken nu de Olympiade deze zomer in Nederland plaatsvindt. Verder vindt u weer een bijdrage van Frans Ballering en van Ingrid Berwald. Als u – na Gödel-Escher-Bach – weer eens na wilt denken over de paradoxen van Zeno, biedt het artikel van Rik Biel u interessant leesvoer. Kees Jonkers laat u spelen met en denken over veelvlakken. Mark Timmer e.a. doen verslag van een lesontwerp rond de sinus vanuit de vraag hoe je een leerling de overstap laat maken van de meetkundige definitie naar het analytisch begrip?
Ook in dit nummer besteden we weer aandacht aan het rekenonderwijs. Lonneke Boels schreef een artikel over het rekenen met breuken op de basisschool. Dit artikel wil ik van harte, zelfs met enige urgentie, bij u aanbevelen omdat het informatie bevat die we als wiskundedocenten niet mogen missen, willen we goed reken- en wiskundeonderwijs geven in het vo.
Op de valreep van zijn pensioen bedacht Bert Zwaneveld dat het de moeite waard zou zijn om Dudoc'ers (docenten die didactisch universitair onderzoek doen) aan het woord te laten over hun ervaringen. Samen met Brechje Hollaardt organiseerde hij een rondetafelgesprek waar interessante thema's besproken werden.

Recreatie
Frits Göbel laat u zweten op een kwadratisch attractiepunt. Het is bijna de laatste keer dat u zich in zijn puzzels kunt verheugen. In nummer 7 verschijnt zijn laatste bijdrage. Ik bericht u daarover uitgebreider in mijn volgend Kort Vooraf. Geniet daarom nu extra.

Tot slot
De examenperiode is aangebroken. Ik wens u veel sterkte en correctiewijsheid en herhaal nog een keer mijn oproep: als u wilt schrijven over uw ervaringen met de centrale examens van dit jaar, dan zie ik uw bijdrage graag verschijnen. Ons adres is: *redactie-euclides@nvvw.nl*.
Weer veel genoegen met dit nummer!

Inhoud

Op weg naar IMO2011 

IMO2010 - OPGAVE 1

[Daniël Kroes]

Van 13 t/m 24 juli 2011 vindt voor het eerst in de geschiedenis in Nederland de Internationale Wiskunde Olympiade (International Mathematical Olympiad, IMO) plaats. Zo'n 600 leerlingen uit meer dan 100 landen zullen dan twee dagen lang in Amsterdam hun tanden zitten in een zestal zeer pittige wiskundeopgaven. Opgaven waaraan ook beroepswiskundigen vaak nog een flinke kluif hebben. Hoe zien die opgaven er eigenlijk uit? En wat trekt de deelnemers hierin zo aan? Om dat te ontdekken trof u in Euclides elke keer een IMO-opgave uit het verleden aan, besproken door een leerling die indertijd in het Nederlandse team zat.

In januari 2009 deed ik op initiatief van mijn wiskundeleraar voor het eerst mee aan de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Dit ging onder het mom van 'ik zie wel hoe ver ik kom', en anderhalf jaar later bleek dat 'hoe ver' Kazachstan te zijn, waar ik mee mocht doen aan de IMO. Mijn doel daar was een eervolle vermelding, die je krijgt als je één opgave volledig oplost. Uiteindelijk loste ik twee opgaven volledig op en had zo 14 punten. Dit was dik voldoende voor een eervolle vermelding en bleek later net 1 punt te weinig voor brons. De vijf andere teamleden, met scores variërend van 15 tot 17 punten, hadden allemaal brons.
Ik zal in dit artikel iets vertellen over de oplossing en mijn weg naar de oplossing bij opgave 1.

De opgave
Bepaal alle functies $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zodat de gelijkheid
$f([x]y) = f(x)[f(y)]$
geldt voor alle $x, y \in \mathbb{R}$.
(Hier staat $[z]$ voor het grootste gehele getal kleiner dan of gelijk aan z.[1])

Het getal $[z]$ heet trouwens de *entier* van z en zo zal ik deze in de rest van het artikel ook noemen.
Wat betekent deze opgave nou eigenlijk?
Een functie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is een functie $f(x)$ zodat voor elk reëel getal a er een reëel getal b bestaat zodat $f(a) = b$.
De functie kan een functie zijn zoals alle middelbare scholieren die kennen, bijvoorbeeld $f(x) = x$ of $f(x) = 3x^3 + 1/x$, maar ook functies zoals:

- $f(x) = x^2$ voor alle getallen groter dan of gelijk aan 0 en $f(x) = -x$ voor alle getallen kleiner dan 0;
- $f(x) = 3x + 2$ voor alle gehele getallen en $f(x) = 2$ voor alle overige getallen.

In deze opgave is het de bedoeling om alle functies te vinden die voldoen aan de gegeven functievergelijking. Het gaat hier dus niet om een vergelijking waaruit je x of y moet oplossen. Voor x en y mag je juist elk paar reële getallen invullen en dan moet de vergelijking nog steeds waar zijn.
Laten we voor deze opgave eens kijken of er makkelijke functies zijn die voldoen aan deze functievergelijking.
Stel dat $f(x) = 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$, dan is $f([x]y)$ gelijk aan 0, net als $f(x)[f(y)]$; dus deze functie voldoet voor alle x en y aan de vergelijking. We hebben nu al een eerste functie gevonden!
Stel nu dat $f(x) = x$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Dan zou moeten gelden dat $[x]y$ gelijk is aan $x[y]$ voor alle $x, y \in$ -$\mathbb{R}$. Invullen van $x = y = 1$ geeft $1 \cdot 1 = 1 \cdot 1$ en dat klopt. Maar invullen van $x = 2$, $y = ½$ geeft $2 \cdot ½ = 2 \cdot 0$, oftewel $1 = 0$ en dat klopt natuurlijk niet. Nu voldoet $f(x) = x$ dus niet, want ook al bestaan er waarden van x en y waarvoor het geldt, we hebben ook waarden voor x en y gevonden waarvoor het niet geldt. Dit is in tegenspraak met het feit dat de gezochte functie voor *alle* waarden van x en y moet voldoen.
Een andere mogelijke functie is $f(x) = [x]$. Nu zou moeten gelden dat: $[[x]y] = [x] \cdot [[y]]$. Maar als we hier $x = 2$, $y = 2½$ invullen, staat er $5 = 4$ en dat klopt ook niet.
We zouden nu nog heel veel functies kunnen proberen, maar aangezien er oneindig veel mogelijke functies zijn, kun je ze niet allemaal één voor één controleren.
Dus moeten we een andere manier bedenken om informatie te krijgen over de functies die voldoen. Maar hoe pakken we dit nou aan?
Uiteindelijk is het doel om voor alle x de waarde van $f(x)$ te vinden (want dan hebben we precies de functie gevonden) maar er zijn oneindig veel mogelijke x-en, dus het is niet meteen duidelijk hóe we die moeten vinden.
We kunnen beginnen door te proberen om de waarde van $f(x)$ te vinden voor een paar verschillende getallen x. Bij functievergelijkingen is het vaak handig de waarde van $f(0)$ te vinden.

Als we in onze functievergelijking $x = y = 0$ invullen, vinden we dat de functie(s) die we zoeken, in ieder geval moeten voldoen aan:
$f(0) = f(0) \cdot [f(0)]$
Dit kunnen we omschrijven tot:
$f(0) \cdot ([f(0)] - 1) = 0$
Dus:
$f(0) = 0$ óf $[f(0)] - 1 = 0$
Nu nemen we eerst aan dat: $[f(0)] - 1 = 0$, oftewel: $[f(0)] = 1$.
Invullen van $y = 0$ geeft nu:
$f(0) = f(x) \cdot [f(0)] = f(x)$
voor alle reële getallen x. Dit betekent dat $f(x)$ een constante functie is, dus $f(x) = c$, met c gelijk aan $f(0)$. Aangezien in dit geval de entier van $f(0)$ gelijk is aan 1, moet gelden dat de entier van c gelijk is aan 1, dus $c \in [1; 2)$. Dit is dus de eerste mogelijke functie. Eigenlijk zijn dit zelfs oneindig veel functies, die we in één keer gevonden hebben.

Zijn dit meteen alle mogelijke functies? Nee. Hierboven hebben we aangenomen dat $[f(0)] - 1 = 0$, maar dit hoeft niet per se zo te zijn. We hadden namelijk ook al gezien dat het zo zou kunnen zijn, dat $f(0) = 0$. Dit geval zullen we dus ook nog moeten behandelen. Dus vanaf nu nemen we aan dat $f(0) = 0$. Als we net als hierboven $y = 0$ invullen, staat hier dat moet gelden dat:
$f(0) = f(x) \cdot [f(0)]$
voor alle reële x. Maar beide kanten zijn gelijk aan 0, dus dit klopt voor alle reële waarden van x. Invullen van $y = 0$ geeft ons nu geen extra informatie over waar de

functie f aan moet voldoen. We zullen dus iets anders moeten verzinnen.

Misschien bestaan er wel getallen x en y zodat $[x]y = x = y$. Als dit zo is kunnen we namelijk die waarden van x en y invullen en dan krijgen we een vergelijking in één variabele (namelijk $f(x)$) en die kunnen we oplossen. Als $x = y = 0$ klopt dit, maar dit hebben we al ingevuld. We proberen even verder en dan merken we dat $x = y = 1$ ook voldoet. Dus laten we dat eens invullen. Nu staat er:
$f(1) = f(1) \cdot [f(1)]$
oftewel:
$f(1) \cdot ([f(1)] - 1) = 0$
Dus nu geldt weer:
$f(1) = 0$ óf $[f(1)] - 1 = 0$
Laten we eerst aannemen dat $f(1) = 0$.
Invullen van $x = 1$ geeft nu dat:
$f([1]y) = f(1) \cdot [f(y)] = 0 \cdot [f(y)] = 0$
voor alle reële getallen y. Dit betekent dat we een nieuwe mogelijke functie hebben, namelijk $f(y) = 0$ voor alle reële getallen y.

Nu hebben we echter nog niet alle mogelijkheden gehad: het kan nog zo zijn dat $f(0) = 0$ én $[f(1)] - 1 = 0$, oftewel $[f(1)] = 1$. Als we nu $y = 1$ invullen vinden we dat:
$f([x]) = f(x) \cdot [f(1)] = f(x)$
Wat houdt dit precies in? Het houdt bijvoorbeeld in dat:
- $f(3) = f(\pi)$
- $f(0) = f(½)$
- $f(6) = f(6)$
- $f(1098) = f(1098{,}0000001)$

Van deze identiteiten gaan we er eentje gebruiken en dat is $f(0) = f(½)$. Aangezien $f(0) = 0$ is, geldt: $f(½) = 0$.
Als we nu $x = 2$ en $y = ½$ nemen, vinden we dat:
$f([2] \cdot ½) = f(2) \cdot [f(½)] = f(2) \cdot [0] = 0$
Aangezien $[2] \cdot ½ = 1$, zou nu moeten gelden dat $f(1) = 0$. Maar we hadden eerder aangenomen dat $[f(1)] = 1$, wat betekent dat $f(1) \in [1; 2)$. Dus dat is in tegenspraak met elkaar.
Blijkbaar kan een functie niet tegelijkertijd voldoen aan $f([x]y) = f(x)[f(y)]$ voor alle x en y, $f(0) = 0$ en $[f(1)] = 1$. Dit laatste geval leidt dus tot geen enkele mogelijke functie.

Nu hebben we alle gevallen gehad en hebben we de volgende mogelijke functies:
- $f(x) = 0$ voor alle reële x, of:
- $f(x) = c$ voor alle reële x met $c \in [1; 2)$.

Ik heb het bewust over *mogelijke* functies, want hoewel deze functies voldoen voor de waarden van x en y die we hebben ingevuld om tot deze functies komen, kan het zijn dat er waarden $x, y \in \mathbb{R}$ bestaan waarvoor de vergelijking toch niet klopt.
Daarom moeten we bij dit soort opgaven altijd alle mogelijke functies controleren. En, als we dit niet doen, kost dat zelfs punten.

Eerst gaan we de functie $f(x) = 0$ controleren. Nu geldt dat:
$f([x]y) = 0$ en $f(x) \cdot [f(y)] = 0 \cdot [0] = 0$
voor alle $x, y \in \mathbb{R}$.
Dus deze functie voldoet ook werkelijk aan de functievergelijking voor alle mogelijke waarden van x en y.
Nu gaan we ook de functie $f(x) = c$ met $c \in [1; 2)$ controleren. Er geldt dat:
$f([x]y) = c$ en $f(x) \cdot [f(y)] = c \cdot [c] = c$
voor alle $x, y \in \mathbb{R}$. De gelijkheid $c \cdot [c] = c$ geldt omdat $[c] = 1$, want het grootste getal kleiner dan of gelijk aan c is 1.
Nu weten we dus dat $f(x) = c$ met $c \in [1; 2)$ ook voldoet aan de functievergelijking voor alle mogelijke waarden van x en y.

Wat hebben we bij deze opgave eigenlijk precies gedaan?
We hebben niet meer gedaan dan het aantal mogelijke functies teruggebracht tot een 'beperkt' aantal, zodat we alle overgebleven mogelijke functies konden controleren.
Het aantal functies dat voldoet, is nog steeds oneindig, want er zijn oneindig veel getallen tussen 1 en 2, maar we konden al die functies op een grote hoop gooien en in één keer controleren.
De oplossing hierboven is precies de oplossing die ik op de IMO heb gebruikt, en tot nu toe weet ik nog geen enkele andere oplossing die wezenlijk anders is.
Vooraf hoopte ik op een leuke, niet te moeilijke opgave 1 en die wens kwam uit: deze opgave valt onder het onderwerp 'functievergelijkingen' en dat is juist mijn lievelingsonderwerp. Daarom kostte het mij niet al te veel moeite deze opgave op te lossen.
De eerste twee gevallen die ik hierboven heb behandeld, had ik op de IMO ook al snel, maar bewijzen dat er bij het laatste geval geen mogelijke functies waren, kostte me toch iets meer moeite. Uiteindelijk had ik de opgave in ongeveer een half uur à drie kwartier opgelost, waarna ik mijn netversie ging schrijven.
In een netversie laat men alle overbodige dingen uit de kladversie weg en alle stappen die je op je kladversie misschien niet voldoende hebt toegelicht, licht men hierin nog toe, zodat het voor de nakijkers duidelijk is hoe je aan een bepaalde bevinding bent gekomen. Zelf heb ik met plezier aan deze en de andere 5 opgaven gewerkt en ik hoop de komende IMO ook nog mee te maken!

Noot van de redactie

[1] Om druktechnische redenen is de notatie $\lfloor z \rfloor$ zoals die oorspronkelijk voorkomt in de IMO-opgave, in het artikel vervangen door $[z]$.

Info

Website 2011: *www.imo2011.nl*

Over de auteur

Daniël Kroes zit in klas 6-vwo van het Minkema College in Woerden. In 2010 nam hij deel aan de IMO in Kazachstan en behaalde daar een eervolle vermelding. Momenteel behoort hij bij de laatste 12 scholieren die kans maken op een plek in het team voor IMO2011.
Hij is van plan wis- en natuurkunde te gaan studeren aan de Universiteit Utrecht.

Het nieuwe wiskunde C; daar is niet veel mis mee!

VERSLAG VAN EEN CONFERENTIE

[Hielke Peereboom]

Wiskunde C onder de aandacht

Het projectteam van de vernieuwingscommissie cTWO (Commissie Toekomst Wiskundeonderwijs) organiseerde op 4 maart j.l. de eerste wiskunde C-conferentie in de Jaarbeurs in Utrecht. Deze conferentie, met als doel de aanstaande vernieuwing binnen dit vak beter onder de aandacht te brengen van wiskundedocenten in tweede fase van het vwo, trok erg veel belangstellenden. Een paar weken voor deze dag moest de inschrijving gestopt worden omdat het maximum aantal deelnemers (120) was bereikt. Na een dag met lezingen, workshops en discussies kan gesteld worden dat de inhoudelijke vernieuwingen binnen wiskunde C zeer breed gedragen worden, maar dat een aantal schoolorganisatorische en praktische problemen nog niet opgelost zijn. Dit artikel is een verslag van deze conferentie. Allereerst worden de twee plenaire openingslezingen besproken. De plannen voor het nieuwe wiskunde C zullen op een rijtje worden gezet. Vervolgens zal worden ingegaan op de gegeven workshops en de afsluitende forumdiscussie.

Tussen droom en realiteit

Na een welkom door de voorzitter van het cTWO-projectteam, Peter van Wijk, trapte Joke Daemen (Universiteit Utrecht, voorzitter wiskunde C-syllabuscommissie) af met de lezing 'Tussen droom en realiteit', waarin zij een kort historisch overzicht gaf van de ontstaansgeschiedenis van wiskunde C en inging op een aantal aspecten van de conceptsyllabus van het nieuwe wiskunde C-programma. De ambitie om een nieuw curriculum wiskunde te ontwikkelen speciaal voor de groep van leerlingen die kiezen voor een cultureel-maatschappelijk profiel (C&M) bestaat al zeker 50 jaar. Het concretiseren bleef lange tijd een probleem. In de periodieke bewegingen die we zien in het maatschappelijke debat over het belang van wiskundeonderwijs, bleek vaak de tijd te kort om daadwerkelijk een mooi programma te realiseren. Gelukkig gaat dit nu wel lukken!, aldus Joke. De afgelopen jaren hebben velen hun schouders gezet onder het ontwikkelen, uittesten en bijstellen van nieuw lesmateriaal. In deze concretiseringen ontstaan nieuwe inzichten en worden oude idealen soms bijgesteld. Dit gebeurt vooral in het belang van de haalbaarheid van het programma, zowel voor de docenten als voor de leerlingen. Tegelijkertijd blijft het goed om in de loop van het proces zo nu en dan pas op de plaats te maken. De werkgroep Wiskunde C is in april 2006 begonnen met het formuleren van de eerste contouren voor een nieuw programma, toen nog voor invoering in 2010.

Uitgangspunten bij het vernieuwde wiskunde C-programma zijn:

- algemeen vormend met daarin centraal de leerling uit het profiel Cultuur en Maatschappij met zijn eigen specifieke (on)mogelijkheden en belangstelling;
- doorstroomrelevantie voor studies als rechten, filosofie, psychologie, pedagogiek e.d.;
- contexten die passen binnen het C&M-profiel;
- reduceren van 'formule-vrees'.

De programmaonderdelen (domeinen) van wiskunde C zijn:

- Logisch redeneren;
- Vorm en Ruimte;
- Algebra en tellen;
- Verbanden;
- Veranderingen;
- Statistiek (alleen SE).

Vervolgens besprak Joke enkele voorbeelden uit de syllabus. Hierin staat bijvoorbeeld dat leerlingen de *abc*-formule 'functioneel' moeten kunnen gebruiken. Maar wat betekent dat? Afgaande op de kruisjeslijst hoeven de leerlingen de *abc*-formule in ieder geval niet uit hun hoofd te kennen. De *abc*-formule zal op het CE altijd gegeven zijn en de leerling zal er mee moeten kunnen werken.

Daarna werd een contextopgave uit de syllabus bekeken waarin de vraagstelling bij wiskunde C werd vergeleken met die bij wiskunde A (zelfde context) om verschillen tussen deze twee te laten zien; ***zie de figuren 1a, 1b en 1c*** op pag. 239.

Deze voorbeelden riepen in de zaal voldoende stof tot discussie op. Zo werd de vraag gesteld of de vraagstelling bij wiskunde C juist niet moeilijker is (vraag b) dan bij wiskunde A (vraag a). Joke legde uit dat het de bedoeling is dat de wiskunde C-leerling door het narekenen van de oppervlaktewaarden in de tabel dusdanig geholpen wordt dat hij vervolgens vraag a zou moeten kunnen doen waarna de stap naar een formule mogelijk zou moeten zijn. Gesuggereerd werd dat het verstandig is dat de genoemde controle expliciet gevraagd wordt voordat vraag a gesteld wordt.

Tenslotte werden de algebraïsche vaardigheden onder de loep genomen. Uiteraard zullen ook wiskunde C-leerlingen een aantal van deze vaardigheden op een – vanuit wiskunde A en B bekeken – bescheiden niveau moeten beheersen maar altijd zullen deze op het CE gevraagd worden binnen een context.

Wiskunde en kunst

Daarna was het de beurt aan beeldend kunstenaar Rinus Roelofs (***zie foto 1***) om in een verbluffende presentatie de verbinding te leggen tussen wiskunde en kunst. Hij is gefascineerd door wiskundige structuren en patronen en probeert in zijn werk daar vorm aan te geven. Waar de ons allen bekende M.C. Escher stopt, gaat Rinus verder met een vertaalslag hiervan naar ruimtelijke vormen. Tijdens de lunch hoorde ik enkele deelnemers zeggen dat Rinus volgens hen eigenlijk wel de nieuwe Escher genoemd mag worden. Naast zijn op zichzelf al bewonderenswaardige kunstobjecten deed Rinus zijn publiek versteld staan door in filmpjes te laten zien hoe deze ruimtelijke figuren vanuit 2-dimensionale objecten door meetkundige afbeeldingen konden ontstaan. Zie verder ook de website van Rinus (*www.rinusroelofs.nl*).

De workshops
Uiteraard werden docenten van de pilotscholen vanuit hun opgedane expertise bij de workshops betrokken. Er waren twee rondes met in totaal acht workshops die, zo bleek o.a. uit de evaluatie achteraf, zeer gewaardeerd werden. Hieronder een impressie. De meeste PowerPoint-presentaties die bij de workshops werden gehanteerd, staan op de website van cTWO (*www.ctwo.nl*; onder Wiskunde C-conferentie).

Logisch redeneren is één van de nieuwe onderwerpen in wiskunde C. Tijdens deze workshop werden onder leiding van Michiel Doorman (Freudenthal Instituut, universiteit Utrecht, en betrokken bij het ontwikkelen van het lesmateriaal) fragmenten van het lesmateriaal bekeken teneinde zicht te krijgen op dit domein. De deelnemers werden aan het werk gezet met een aantal opgaven (***zie figuur 2*** en ***figuur 3***) en er werden ervaringen uitgewisseld met de docenten Zwaantje Warmelink en Peter Donkelaar die delen van het experimentele lesmateriaal hebben uitgeprobeerd. Hun conclusies: dit onderwerp is voor de beoogde leerlingen aantrekkelijk, zeer zinvol en goed haalbaar.

In de workshop *'Hebben ze het nog wel op een rijtje bij wiskunde C?'* ging Jacques Jansen (wiskunde docent aan het Strabrecht College te Geldrop en (hoofd)auteur van het lesmateriaal voor het domein Veranderingen) in op de eindtermen met betrekking tot het onderwerp Rijen. Bij het lezen van deze eindtermen denk je als wiskundedocent al snel aan de formele kant hiervan met allerlei exercities met recursieve en directe formules. Jacques liet zien hoe je rijen vanuit de literatuur, kunst en geschiedenis op een verfrissende en vernieuwende manier kunt introduceren, en hoe je vervolgens, langzaam opgebouwd, via algebra ook aan een aantal formele aspecten kunt werken. Maar ook hier gebeurt dat altijd binnen cultuurhistorische contexten. Een workshop met diepgang en een geheel nieuwe aanpak van rijen.

Denkactiviteiten bij wiskunde C was de titel van de workshop van Piet Versnel, pilotdocent (Da Vinci College, Purmerend), lid van de syllabuscommissie wiskunde A en lid van de cTWO-subcommissie Denkactiviteiten. In het visiedocument 'Rijk aan betekenis' (te vinden op *www.ctwo.nl* onder *publicaties*) wordt veel nadruk gelegd op denkactiviteiten. De vraag die zich in de praktijk voordoet is wat we moeten verstaan onder denkactiviteiten en hoe we die kunnen invoeren in ons dagelijks onderwijs, aldus Piet.

De denkactiviteiten zoals die in het visiedocument van cTWO worden genoemd, zijn: Modelleren en algebraïseren, Ordenen en structureren, Analytisch denken en probleemoplossen, Formules manipuleren, Abstraheren en Logisch redeneren en bewijzen.
Vervolgens geeft hij een aantal voorbeelden hiervan zoals die te vinden zijn in het tot nu toe ontwikkelde lesmateriaal voor het nieuwe wiskunde C-programma alsmede een aantal eigen voorbeelden, zoals:

$$P = 5{,}5 + \frac{18 - T}{30} \cdot 94{,}5$$

- Is er sprake van een evenredig verband?
- Welk getal kan ik veranderen om er een evenredig verband van te maken, en hoe?

Tot slot werden de deelnemers uitgedaagd om gezamenlijk te proberen een denkactiviteit te bedenken bij een A1-eindexamenopgave van het afgelopen jaar, die passend is bij het vernieuwde examenprogramma wiskunde C.

De pilotdocenten Henk Reuling (Liemers College, Zevenaar) en Corstian Hanse (Bornego College, Heerenveen) verzorgden een workshop rondom het domein *Verbanden*. Dit domein zit ook in het huidige wiskunde C-programma maar heeft daar een vrij formeel, typisch wiskunde A-karakter. Onder verantwoordelijkheid van cTWO is voor dit domein nieuw lesmateriaal ontwikkeld in de vorm van o.a. de modules *Cyclisch rekenen* en *Ontwikkelen* die beter aansluiten bij de doelstellingen van (het nieuwe) wiskunde C. Het verschil met wiskunde A is in de ogen van Henk en Corstian dat bij A vrijwel meteen de focus ligt op de rekenregels, terwijl bij C juist veel tijd besteed wordt aan het aanbrengen van begrip. De rekenregels komen aan het einde, of worden zelfs overgeslagen. Nadat via een aantal fragmenten uit dit materiaal de deelnemers een indruk hadden gekregen van het lesmateriaal (het bevat behoorlijk veel 'denkactiviteiten'), werd door Henk en Corstian ingegaan op de vragen: wat zijn de ervaringen op hun scholen, wat zijn de verschillen met het huidige programma, wat is het niveau en hoe wordt dat door de leerlingen ervaren en in hoeverre is het vernieuwend?
Hun antwoorden (kort samengevat): de ervaringen op hun twee scholen wijzen uit dat de leerlingen wiskunde C aan de ene kant 'leuk' en 'interessant' vinden maar anderzijds ook moeilijk. Een uitspraak van een leerling: 'Je kunt niets echt oefenen of leren, je moet alles begrijpen en uitleggen.'
De verschillen tussen het nieuwe domein *Verbanden* en het domein *Functies en grafieken* van het huidige programma zijn bij bestudering van de letterlijke eindtermen niet zo groot maar in de uitwerking wel. Dit heeft te maken met het gebruik van aansprekende en bij het profiel passende contexten. Wat betreft het lesmateriaal merken Henk en Corstian op dat de leerlingen vinden dat sommige contexten in de teksten te lang doorgevoerd worden en gaan 'vervelen' en dat ze de module *Cyclisch rekenen* leuker vonden dan *Ontwikkelen*.

De workshop *Statistiek en Kansrekening* van de twee pilotdocenten Simon Biesheuvel (Willem de Zwijger College, Bussum) en Peter Vaandrager (CSG Liudger, Drachten) trok ook veel belangstelling.
Inhoudelijk bekeken worden in het vernieuwde programma nieuwe begrippen (Odds-ratio, horizontaal en verticaal percenteren, effectgrootte) maar ook bekende begrippen behandeld. Dit alles gebeurt meestal in situaties waarbij twee groepen (of deelgroepen) worden vergeleken. Ook is er regelmatig aandacht voor het werken met grote bestanden via een computerpracticum. Bij kansrekening gaat het grotendeels over onderwerpen zoals voorwaardelijke kansen, onafhankelijke gebeurtenissen, variantie en standaardafwijking, verwachtingswaarde, de binomiale kansverdeling en de normale verdeling.
In deze workshop is gekeken naar het beschikbare lesmateriaal en de manier waarop deze onderwerpen aangeboden worden. Regelmatig worden via een computerprogramma (VU-stat) simulaties uitgevoerd om ideeën te ontwikkelen (bijvoorbeeld 10 kenmerken die samen een bijna een normale verdeling opleveren) of te controleren (bijvoorbeeld de wet van de grote aantallen). Er was een demonstratie van de zogenaamde Digimap, een digitaal programma dat parallel loopt aan de modules die voor dit onderwerp ontwikkeld zijn. In deze Digimap zitten de programma's VU-stat en Excel, die hierbij te gebruiken zijn. Deze digimap is gratis te downloaden op *www.ctwo.nl* (onder *lesmateriaal*).

De gereserveerde zaal voor de workshop *Het CE Wiskunde C* van Ruud Stolwijk (toetsdeskundige Cito, Arnhem en lid van de syllabuscommissie wiskunde C) bleek te klein. Er was dus veel belangstelling voor hoe het centraal examen er uit komt te zien. Er is nog geen voorbeeldexamen beschikbaar maar al wel voorbeeld(examen)opgaven (zie ook de conceptsyllabus, te downloaden op de website van de CvE (*www.cve.nl*). Ruud liet

een aantal van deze opgaven (***zie figuur 4*** en ***figuur 5***) de revue passeren zodat de deelnemers een indruk kregen van het wiskunde C-examen nieuwe stijl zoals dat in mei 2012 voor het eerst zal worden afgenomen op de pilotscholen.

De workshop *Meetkunde met Islamitische mozaïeken* had weer een heel andere insteek. Deze module, ontwikkeld door Goossen Karssenberg (OSG De Hoge Berg, Texel) in het kader van Leraar In Onderzoek, is bij uitstek geschikt voor wiskunde C-leerlingen. Als onderdeel van de architectuur van tal van middeleeuwse islamitische gebouwen spelen mozaïeken, met hun speelse patronen en prachtige pastelkleuren een belangrijke rol (zie bijvoorbeeld de site *www.patterninislamicart.com*). Bij het behandelen van vlakke meetkunde op alle mogelijke niveaus bieden deze mozaïeken een zee van toepassingen. Op natuurlijke, praktische wijze wordt een verbinding gemaakt tussen wiskunde, kunst en geschiedenis. Dit spreekt leerlingen zeer aan en stimuleert degenen met een islamitische achtergrond nog eens extra. Door de verbinding met de cultuurgeschiedenis past het onderwerp zeer goed in het wiskunde C-programma. Het is natuurlijk ook prima inzetbaar in het huidige programma binnen de keuzeonderwerpen. Tijdens deze workshop deelde Goossen (***zie foto 2***) zijn leservaringen met het gebruik van deze mozaïeken bij wiskunde C en A op vwo met de deelnemers. In een lesserie, ontworpen voor vwo-4 en -5 gaan leerlingen zelf mozaïeken analyseren en ontwerpen. De resultaten van een eerste project, gehouden in het voorjaar van 2010 op de middelbare school op Texel en een school in hartje Rotterdam, werden besproken, maar de deelnemers werden ook zelf aan het werk gezet om samen een patroon te ontwerpen. Voor een deel van het gebruikte lesmateriaal, zie:
www.nwo.nl/files.nsf/pages/NWOP_893HCD/$file/mozainfoboekje.pdf

Last but not least was er de workshop over het nieuwe domein *Vorm en ruimte*, gegeven door Arja Bijleveld, pilotdocent aan Het Streek te Ede. In het programma voor deze dag konden we lezen: *In deze workshop gaan we ervaren wat mijn leerlingen ook ervaren: Wiskunde is LEUK!*
Ondanks mijn scepsis over de inhoud valt het ontwikkelde lesmateriaal erg goed bij de leerlingen.
We gaan ook aan het werk met het materiaal, en ik probeer je te laten ervaren wat mijn leerlingen enthousiast maakt.

Net als alle andere wiskunde C-pilotdocenten gebruikt ze het experimentele cTWO-materiaal in haar Wiskunde C-klassen (er bestaan immers nog geen boeken voor dit nieuwe programma). Ze vertelde enthousiast over haar ervaringen.
Vorm en Ruimte bestaat uit twee modules: *Verhoudingen* en *Perspectief*. Bij *Verhoudingen* komen o.a. papierformaten, de gulden snede en toepassingen in de architectuur aan de orde (***zie figuur 6***). De module *Perspectief* begint het met een zeer verrassende kijkdoos die leerlingen meteen enthousiast maken voor dit onderwerp. In de module krijgen de leerlingen zicht op allerlei perspectivische situaties in kunst en architectuur waarbij het zelf maken van perspectieftekeningen uiteraard ook nadrukkelijk aan de orde komt. In dit materiaal zitten havo wiskunde B-opgaven (uit vorige programma's), waarbij het opviel dat dit goed functioneerde binnen de wiskunde C-context.
Vorm en Ruimte is een flinke intellectuele uitdaging voor de leerlingen; maar volgens Arja met succes. Haar acht 'C&M-meiden', die aanvankelijk 'niets' met wiskunde hadden, werden steeds meer gemotiveerd.

De dag werd besloten met een paneldiscussie, waarin de zaal zich overigens ook kon mengen, aan de hand van een aantal stellingen. In het panel hadden plaatsgenomen: Dirk Siersma (voorzitter cTWO), Gerard Koolstra (auteur wiskunde C-lesmateriaal) en de hierboven al genoemde Joke Daemen en Piet Versnel.
De discussie ging over de volgende stellingen:
- Er is een simpele oplossing voor het probleem van de kleine wiskunde C-groepen: stel wiskunde C verplicht binnen C&M.
- Met dit wiskunde C-programma hebben leerlingen meer plezier.
- Het stimuleren van de keuze van wiskunde C onder 3-vwo-leerlingen met voldoende perspectieven voor wiskunde A is een niet-emancipatoire daad.
- Het feit dat de vwo-leerlingenpopulatie door de introductie van wiskunde C in drie in plaats van twee wiskundegroepen verdeeld wordt, zal op veel (met name kleinere) scholen leiden tot slechter in plaats van beter wiskundeonderwijs voor de wiskundig zwakke leerling.
- Aangezien statistiek in het vernieuwde wiskunde C-programma niet in het CE getoetst wordt, zal dit juist zo belangrijke en nuttige onderdeel een zachte dood sterven.

Zoals te verwachten was, bleken panel en zaal (***zie foto 3***) verdeeld over de stellingen (en wat is uw mening?), maar het uitwisselen van de argumenten bleek leerzaam en plezierig. Verder kwamen en passant ook tips langs met betrekking tot hoe om te gaan met de kleine wiskunde C-groepen. Bijvoorbeeld door het verticaal clusteren van 4-vwo en 5-vwo, het clusteren van wiskunde C en wiskunde D of het deels clusteren met wiskunde A naast het hebben van een eigen lesuur voor de wiskunde C-leerlingen. Vanwege het succes van deze dag maar ook om nog meer de ontwikkelingen bij het hele onderwijsveld te brengen organiseert cTWO in maart 2012 een tweede wiskunde C-conferentie. U bent hiervoor alvast van harte uitgenodigd. Verder wijzen we u er op dat al het experimentele lesmateriaal te downloaden is via *www.ctwo.nl*.



foto 1 Rinus Roelofs



foto 2 Goossen Karssenberg

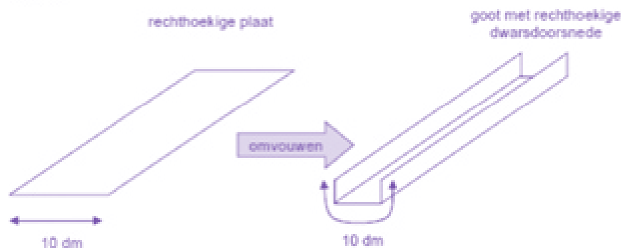


foto 3 De zaal

Fotografie
Mark Uwland, Freudenthal Instituut

Over de auteur
Hielke Peereboom is lid van het projectteam van cTWO en als wiskundedocent werkzaam aan het Bornego College te Heerenveen.
E-mailadres: *h.peereboom@uu.nl*

Van een lange rechthoekige plaat met een breedte van 10 dm wordt aan weerszijden een even brede rand omgevouwen zodat een goot ontstaat met een rechthoekige dwarsdoorsnede. Zie de tekening.



figuur 1a

Wiskunde A:

a. Toon aan dat de oppervlakte A van de dwarsdoorsnede gelijk is aan $A = 10x - 2x^2$ (x in d
A in dm^2), waarbij x de hoogte is van de goot.
b. Bereken de maximale oppervlakte van de dwarsdoorsnede. (eventueel: Bereken met behul
de afgeleide de maximale oppervlakte)

figuur 1b

Wiskunde C:

In de tabel hieronder zie je het verband tussen de hoogte x van de goot en de oppervlakte
dwarsdoorsnede.

Hoogte x (in dm)	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,2	.....
Oppervlakte (in dm^2)	8	9,12	10,08	10,88	11,52	12	12,32	.....

a. Bereken de oppervlakte bij een hoogte van $x = 2,6$.
b. Maak een formule voor de oppervlakte van de dwarsdoorsnede, uitgedrukt in x.
c. Onderzoek, met tabel of formule, bij welke hoogte de oppervlakte van de dwarsdoorsned
maximaal is.

figuur 1c

Een moordzaak.
Ad en Ben zijn verdachten in een moordzaak. Ze leggen onder ede de volgende verklaringen
Ad: Ben is schuldig en Cor is onschuldig.
Ben: Als Ad schuldig is, dan is Cor ook schuldig.
Cor: Ik ben onschuldig, maar minstens één van de anderen is schuldig.

a. Stel dat alle drie de verdachten onschuldig zijn, wie pleegde(n) er dan meideed?

b. Stel dat ze alle drie de waarheid spraken, wie is/zijn er dan schuldig?

c. Stel dat de onschuldigen de waarheid spraken en de schuldigen logen, wie is/zijn er dan sch

figuur 2

De dokter zegt: "Als je mijn medicijn slikt, dan word je beter."
Een week later kom je de dokter tegen bij de supermarkt.
De dokter kijkt je aan en concludeert: "Je ziet er goed uit. Je hebt dus mijn medicijn geslikt."

De conclusie van de dokter is begrijpelijk, maar is die wel volgens de regels van de logica? Het ku
zijn dat je *ook* beter wordt van een paar dagen rust. Zijn eerste uitspraak sluit dat niet uit. Dus dat j
bent *dankzij* zijn medicijn is niet helemaal zeker.

8 In het volgende tekstfragment komt de term *logisch* voor.
Waarom wordt hier het woord 'logisch' gebruikt? Geef commentaar op de logica.

figuur 3

Er wordt vaak beweerd dat de verhouding van de gulden snede gebruikt is bij het ontwerp van het Parthenon, een bekende Griekse tempel op de Acropolis in Athene. Het gebouw is nu een ruïne, maar vroeger was de bovenkant van het gebouw nog wat hoger. Dat kun je aan de zijkanten nog zien. De schuine lijnen geven aan hoe het gebouw er vroeger uitzag. Als je een rechthoek om de contouren van het gebouw tekent, krijg je een Gulden Rechthoek. Dat betekent dat de verhouding van de hoogte en de breedte van het gebouw gelijk is aan de gulden snede.

Foto



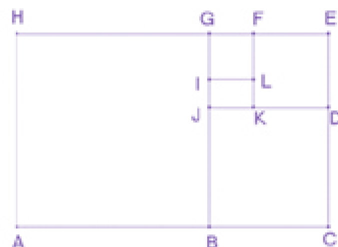
Het bijzondere van de Gulden Rechthoek is dat na het weghalen van een perfect vierkant uit de Gulden Rechthoek, de overblijvende rechthoek weer een Gulden Rechthoek is.

a. Meet de zijden van de grootste in de foto getekende rechthoek op en laat door een berekening zien dat deze inderdaad een gulden snede verhouding kan hebben.
b. Geef een voor- en een tegenargument voor de bewering dat de gulden snede verhouding bewust gebruikt is voor het ontwerp van het Parthenon.

figuur 4

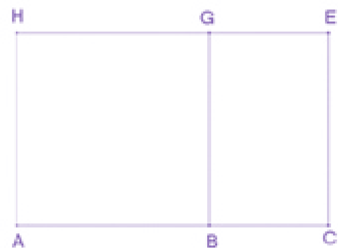
We bekijken in de rest van de opgave onderstaande figuur 1. Deze figuur zie je ook afgebeeld op de foto. In de figuur is ACEH de in de tekst bedoelde Gulden Rechthoek.

figuur 1



De Gulden Rechthoek ACEH zie je hieronder in figuur 2 nogmaals weergegeven.

figuur 2



c. Geef in figuur 2 aan hoe hieruit figuur 1 kan ontstaan door een aantal extra lijnstukken te tekenen. Licht je werkwijze toe en geef aan in welke volgorde je de extra lijnstukken tekent.

De verhouding van de gulden snede zie je in figuur 1 terug in de verhouding van de lengtes van AC en AH en in de verhouding van de lengtes van JK en IJ. Ook zie je deze verhouding in de verdeling van sommige lijnstukken. Zo wordt het lijnstuk AC verdeeld in lijnstuk AB en lijnstuk BC. De verhouding van de lengtes van AB en BC is gelijk aan de gulden snede.
Ook bij de verdeling van andere lijnstukken zie je de gulden snede terug.
d. Geef drie lijnstukken uit figuur 1, met de verdeling, die verdeeld worden volgens de gulden snede.

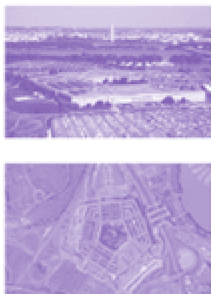
De rechthoek IJKL in figuur 1 is een Gulden Rechthoek. We kiezen de afmetingen in deze rechthoek als volgt: $IJ = 1$ en $JK = \varphi$ ($\approx 1,618...$).
Op basis hiervan kunnen de lengtes van AC en AH worden uitgedrukt in φ.
e. Druk de lengtes van AC en AH uit in φ.

figuur 5

De regelmatige vijfhoek

Tussen de regelmatige vierhoek en de regelmatige zeshoek zit de regelmatige vijfhoek. Die brengt meer problemen met zich mee.

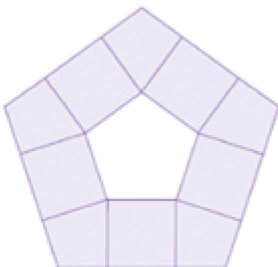
Het grootste gebouw ter wereld is het Pentagon in Washington, waarin het Amerikaanse ministerie van defensie is gevestigd.
Het gebouw is tijdens de tweede wereldoorlog gebouwd en in 1998 gerenoveerd.



- Oppervlakte van het terrein binnen de buitenste muren: 97.000 m²
- Oppervlakte van het open gebied in het midden van het gebouw: 20.000 m²
- Parkeerplaatsen: 8.770 voertuigen
- Vloeroppervlak: 620.000 m²
- Inhoud: 2.000.000 m³
- Lengte van de buitengevel: 261 m
- Hoogte: 24 m
- Aantal verdiepingen: 7 (5 bovengronds, 2 ondergronds)
- Totale lengte van de gangen: 28 km

Het gebouw dankt zijn naam aan zijn vorm: een regelmatige vijfhoek (penta = vijf, gonus = hoek).

Middenin is een open ruimte van 20.000 m^2, terwijl de hele vijfhoek een oppervlakte heeft van 97.000 m^2.
Het gebouw is opgedeeld in vijf rechthoeken en vijf vliegers.
Een regelmatige vijfhoek heeft hoeken van 108°.



De vliegers hebben dus een hoek van 108°.
a Hoe groot zijn de andere hoeken?

De buitenomtrek is een uitvergroting van de binnenomtrek.
b Met welke factor? Klopt dat met de gegeven oppervlaktes?
c Klopt de vloeroppervlakte met de inhoud?

figuur 6

Meervoudige intelligentie in de wiskundeles

BIJ REKENEN, OPPERVLAKTE, VERGROTEN, GONIOMETRIE, VERBANDEN

[Ingrid Berwald]

Deel 3 – Vergroten

Er zijn acht meervoudige intelligenties; ieder mens beschikt over al deze acht intelligenties, waarbij de ene intelligentie bij de één sterker is ontwikkeld dan bij de ander. Als een intelligentie een kind boeit en de intelligentie wordt verwerkt in een instructie of een andere verwerking van de leerstof, dan neemt het kind de leerstof beter op. Dit is gebleken uit onderzoeken van de Amerikaanse hoogleraar Howard Gardner.
Zijn motto is: 'Het gaat er niet om hoe intelligent je bent, maar om hoe je intelligent bent'. Iedereen is op zijn eigen manier knap. Vandaar de omschrijvingen bij de volgende intelligenties:

1. Verbaal – Linguïstisch (taalknap)
2. Logisch – Mathematisch (rekenknap)
3. Visueel – ruimtelijk (kijkknap)
4. Muzikaal – ritmisch (muziekknap)
5. Lichamelijk – kinesthetisch (bewegingsknap)
6. Naturalistisch (natuurknap)
7. Interpersoonlijk (samenknap)
8. Intrapersoonlijk (zelfknap)

In onderstaand artikel komt het gebruik van verschillende intelligenties bij het onderwerp vergroten aan bod. Het is het derde deel in een serie van vijf artikelen.[1]

Zelf materiaal maken

Op het moment dat mijn school besloot te gaan werken vanuit het principe van de meervoudige intelligentie, werd er aan de docenten gevraagd de verschillende intelligenties één keer per periode actief in te zetten. De sectie wiskunde wilde bij ieder hoofdstuk een opdracht met een intelligentie zoeken. Dat zoeken werd al snel maken, we vonden namelijk bijna niets.

De kubus

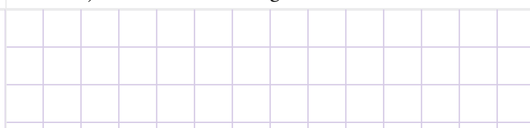
Bij het onderwerp *vergroten* vonden we het verhaal van de ijzervlechter, de plaatwerker en de betongieter, die elk een kubus maakten met een ribbe van 8 cm met daarbij de kosten van de kubus.
Daarna moesten de kubussen vergroot worden tot de werkelijke maat, 1,60 m, en moesten de leerlingen prijsopgaven van de grote kubussen maken. Om leerlingen gevoel te laten krijgen bij deze opdracht, gebruikten we Zometool of rietjes (Zometool bestaat uit bollen waarin je ribben kunt steken om eenvoudig draadmodellen te maken; het is heel geschikt voor het maken van zeepvliezen), polydron (kan ook met papier) en gigoblokjes (kan ook met houten kubussen). De leerlingen maken bij deze opdracht gebruik van de lichamelijk motorische intelligentie: ze voelen dat de ijzervlechter 2 keer zoveel materiaal nodig heeft als de kubus 2 keer zo groot wordt. Dat de betongieter dan 8 keer zo duur uit is, is voor veel leerlingen een verrassing. Door met materialen te werken krijgen de leerlingen er een gevoel bij. De leerlingen ontdekken zo vrij eenvoudig dat 2× zo groot, respectievelijk 2× (vlechtwerk), 4× (plaatwerk) en 8× (massief beton) zo duur betekent.

De Reus

Het werken met de kubusopdracht was de enige opdracht die we hadden totdat in 2008 het boek *Twee vrouwen* van Harry Mulish op school uitgedeeld werd in het kader van 'Nederland leest'. Hierin staat een wiskundig interessant stukje. De twee dames zitten zich op een avond te vervelen… *De rest van de avond brachten wij door met kletsen en met een rekenspelletje, dat wij plotseling uitvonden. De wereldreus doopten wij het. Hoe lang was de dagelijkse drol van de wereldreus? Er leefden 3 miljard mensen op aarde, die elk gemiddeld een drol van 20 centimeter produceerden; van kinderen was hij wat korter, in Europa en Amerika wat langer dan in de Derde Wereld, maar alles bij elkaar kwam het neer op zeshonderdduizend kilometer, dat wil zeggen van hier naar de maan en terug…*
Bij het lezen van dit stuk viel niet direct op dat de drollen allemaal achter elkaar gelegd werden. In de klas filosoferen we nu over de grootte van de mondiale reus, hoe groot is een reus eigenlijk als we 6,5 miljard mensen samensmelten tot één reus? De schatting die de kinderen maken, heeft meestal negen nullen. Als we de mens echt gaan vergroten en wat beter nadenken, blijkt zo'n reus slechts 3,2 km lang te zijn. Dit verbaast de leerlingen. De opdracht erna – reken nog eens iets uit over de reus en schrijf je antwoord op het bord – wordt dan ook enthousiast gemaakt. We weten inmiddels hoe dik een haar is, hoe lang een duim, in hoeveel stappen hij van Amsterdam naar Rotterdam loopt, hoe lang zijn darmen zijn, wat de oppervlakte van zijn voetafdruk is en ga zo maar door. Het schrijven van al deze gegevens op de poster van de reus vonden onze leerlingen erg leuk. Bij deze opdracht kunnen leerlingen verschillende intelligenties inzetten. De taalkundige leerlingen lezen het deel van het boek aandachtig (soms helemaal, voor Nederlands) en worden zo aan het denken gezet. Motorische leerlingen maken er een wedstrijdje van om het gekste of grappigste van de reus te berekenen. Visuele leerlingen maken een plaat van een reus en zetten daar de gegevens bij.

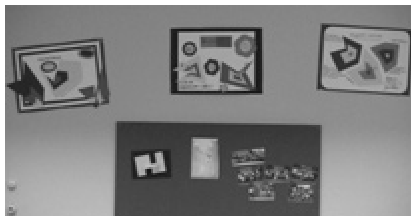
Bedek de maan

Ikzelf hou van verbazing in de klas. Een andere ontdekking die we bij dit hoofdstuk doen, is dat je de maan altijd kunt bedekken door je pink, als je die met gestrekte arm voor je uit houdt. De lengte van je arm staat tot de afstand naar de maan als de breedte van je pink staat tot de diameter van de maan. Het leuke is, dat je later hoort, dat leerlingen dit ook echt uitproberen, als ze bij een heldere nacht de maan zien. Je hoort het een aantal lessen later altijd wel een keer terug.

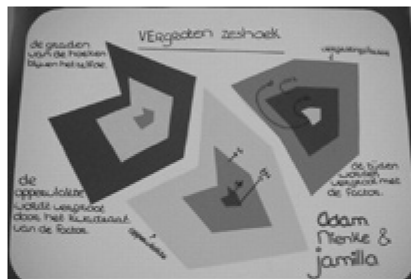


A7, A5 en A3

Pas een jaar later bedachten we tijdens een studiemiddag over het inzetten van de intelligenties de volgende opdracht: we maakten een hele serie met driehoeken die er allemaal hetzelfde uit zagen. In de driehoeken zetten we enkele hoeken en lengtes van zijdes, zodat er steeds drie driehoeken gelijkvormig waren. Deze driehoeken gebruikten we voor het maken van groepjes in de klas. Hier wordt gebruik gemaakt van verschillende intelligenties. De motorische kinderen lopen al snel met hun driehoek door de klas en houden het kaartje in allerlei standen om te kunnen zie of de driehoeken gelijkvormig zijn. Interpersoonlijke kinderen overleggen vooral en gaan in discussie. De naturalistische leerlingen willen de driehoeken ordenen om er zo achter te komen welke bij elkaar horen. In de praktijk bleek dat dit minder eenvoudig is dan we dachten, al zijn er leerlingen die gewoon een advertentie op het bord zetten.
Gezocht: een driehoek met een hoek van 32 graden.



Zo'n advertentie is wel handig, maar soms was de hoek van 32 graden net de ontbrekende hoek en moest er toch nog gerekend worden. Als de groep gevonden was, moesten de leerlingen de ontbrekende gegevens uitrekenen. De drie driehoekjes zijn zo gemaakt dat er altijd een vergrotingsfactor bepaald kan worden; met deze factor kunnen dan de ontbrekende zijdes berekend worden. Bij dit onderdeel gaat het om de interpersoonlijke intelligentie, leerlingen helpen elkaar om aan het goede antwoord te komen.
Met het goede antwoord ontvingen ze het materiaal voor het tweede deel van deze opdracht. Het materiaal bestond uit een velletje A7, A5 en A3 papier per leerling. Elke leerling tekent op het A5 papier een zo groot mogelijke willekeurige zeshoek. Vervolgens draait het figuur door en moet een andere leerling uit het groepje de zeshoek vergroten op het A3 papier; elke leerling maakt dus een vergroting van de tekening van een groepsgenoot. Er wordt druk gemeten. Hierna moeten ze de zeshoek nog een keer doordraaien en verkleinen naar het A7 blaadje. Doordat een medeleerling de figuur vergroot dan wel verkleint, blijven de leerlingen erg opletten of dat wel goed gebeurt. Nu heeft elk groepje drie setjes met figuren. Hiermee moet een poster gemaakt worden over vergroten. De leerlingen leren van deze opdracht dat de hoeken gelijk blijven en alleen de lengtes vergroot worden. Op de posters komt een mooi overzicht te staan, ook het vergroten van de oppervlakte zie je hier weer terug. Het leuke van deze les is dat je de leerlingen niet aan het werk hoeft te zetten, ze doen gewoon hun ding. Het maken van de posters is een combinatie van de visuele intelligentie en de wiskundige. Vergroten is nog nooit zo leuk en leerzaam geweest.



Noot (red.)

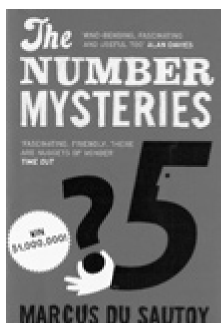
[1] Deel 1 van deze artikelenserie staat in *Euclides* 86(4), pp. 154-155, en deel 2 in *Euclides* 86(5), pp. 189-190.

Over de auteur

Ingrid Berwald is docente wiskunde aan het IJsselcollege in Capelle aan den IJssel. Ze geeft les aan vmbo-, havo- en vwo-klassen en vindt het belangrijk dat alle leerlingen positieve ervaringen opdoen tijdens het vak wiskunde.
E-mailadres: *i.berwald@ijsselcollege.nl*

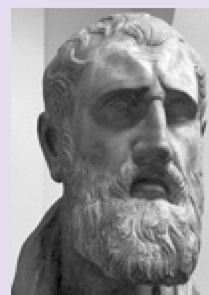
Verschenen / The num8er my5teries

Ondertitel: A Mathematical Odyssey through Everyday Life
Auteur: Marcus du Sautoy
Uitgever: Fourth Estate, Londen (2011)
ISBN: 978-0-00-73986-3
Prijs: £ 8,99 (XIV + 304 pagina's, paperback)



Beschrijving – From the author of *The Music of the Primes* and *Finding Moonshine* comes a short, lively book on five mathematical problems that just refuse to be solved – and on how many everyday problems can be solved by maths.
Every time we download a song from iTunes, take a flight across the Atlantic or talk on our mobile phones, we are relying on great mathematical inventions. Maths may fail to provide answers to various of its own problems, but it can provide answers to problems that don't seem to be its own – how prime numbers are the key to Real Madrid's success, to secrets on the Internet and to the survival of insects in the forests of North America.
In *The Number Mysteries*, Marcus du Sautoy explains how to fake a Jackson Pollock; how to work out whether or not the universe has a hole in the middle of it; how to make the world's roundest football. He shows us how to see shapes in four dimensions – and how maths makes you a better gambler. He tells us about the quest to predict the future – from the flight of asteroids to an impending storm, from bending a ball like Beckham to predicting population growth.
It's a book to dip in to; a book to challenge and puzzle – and a book that gives us answers.
Website – www.fifthestate.co.uk/numbermysteries

Twee paradoxen van Zeno



DE ONEINDIGHEID ONTMASKERD

[Rik Biel]

Al in de Griekse oudheid zijn allerlei wiskundige en logische paradoxen geformuleerd, die tot op de dag van vandaag blijven boeien. We bespreken hier een tweetal bekende van Zeno, de *Dichotomie* en *Achilles en de schildpad*, die op elkaar lijken en op dezelfde wijze kunnen worden ontrafeld. Menigeen kent ze en ook op school zullen ze wel eens ter sprake komen. De gebruikelijke oplossing die ik in boeken en op websites aantrof, kon mij nooit overtuigen. Jarenlang liep ik er zogezegd mee rond. De paradoxen irriteerden me. Totdat ik besloot ze nog eens onbevangen te onderzoeken en poogde ze op een toegankelijke manier te duiden. Er bleek een basale uitleg te zijn, een uitweg niet door maar langs het moeras van de verzamelingenleer. Misschien komt het u in de klas ooit van pas. Laten we eerst de twee paradoxen bekijken. Dan wordt duidelijk waarover het gaat.

De Dichotomie (tweedeling)

Achilles wil een bepaald traject afleggen. Hij staat bij de start, op de reële rechte gerepresenteerd door het punt 0, en ziet in de verte de finish liggen, corresponderend met het punt 1. Hij begint te rennen. Om bij de finish te komen zal hij toch eerst de helft van het traject moeten afleggen. Halverwege aangekomen moet hij eerst de helft van het resterende deel overbruggen om verderop te komen. Op driekwart van het traject volgt eerst de helft van het restant. Enzovoort. Zodoende loopt Achilles langs de punten 0, ½, ¾, ⅞, …, ofwel de rij (met $n \geq 0$):

(1)… $R_n = 1 - (½)^n$

Hij heeft oneindig veel punten en deeltrajecten voor zich. Hij nadert de finish tot op willekeurig korte afstand, maar hij komt daar niet aan.

Zo lijkt het althans, afgaand op de redenering. Maar ondertussen geloven we niet dat Achilles niet aankomt.

Achilles en de schildpad

Achilles heeft de reputatie de snelste atleet van Griekenland te zijn. Desondanks durft de schilpad het tegen hem op te nemen, op voorwaarde dat hij een voorsprong krijgt. Achilles stemt toe. Ze gaan op hetzelfde moment van start. Wanneer Achilles het startpunt van de schilpad heeft bereikt, dan is die ondertussen vanzelfsprekend naar een volgend punt gelopen. Als Achilles dat punt bereikt, is de schildpad wederom een stukje verder. Enzovoort. Telkens wanneer Achilles aankomt op het punt waar zijn tegenstander even tevoren was, is die alweer doorgelopen. De schildpad houdt altijd een voorsprong. Achilles haalt hem nooit in. De schildpad wint de wedstrijd.

Zo lijkt het althans, afgaand op de redenering. Maar ondertussen geloven we niet dat de schildpad wint.

De gelijkenis

De *Dichotomie* is erg overzichtelijk. *Achilles en de schildpad* lijkt op het eerste gezicht ingewikkelder. Toch zijn ze in essentie gelijk. We zullen die gelijkenis duidelijk herkennen als we de bewegingen in *Achilles en de schildpad* ontleden. We kunnen de gang van zaken inzichtelijker maken door ons voor te stellen dat de schilpad, te beginnen bij zijn startpunt, telkens een kiezelsteen laat vallen. Hij laat die vallen zodra Achilles de kiezel bereikt die als laatste is gevallen.

De posities D_n van de stenen voldoen aan:

$D_0 = 0$ (start Achilles),

$D_1 = D$ (start schildpad), en met $n > 1$ wordt voldaan aan:

(2)… $D_n - D_{n-1} = (D_{n-1} - D_{n-2}) \times s$

waarbij s = (snelheid schildpad)/(snelheid Achilles) en $0 < s < 1$.

Het verband in (2) is als volgt af te leiden. De schildpad gaat van D_{n-1} naar D_n. De afstand $D_n - D_{n-1}$ daartussen, het linkerlid van vergelijking (2), is gelijk aan de snelheid van de schildpad maal een tijdsduur.

De tijd die de schildpad krijgt, is gelijk aan de tijd die Achilles nodig heeft om van D_{n-2} naar D_{n-1} te komen.

Die tijdsduur is gelijk aan de afstand $D_{n-1} - D_{n-2}$ gedeeld door de snelheid van Achilles. Het rechterlid van vergelijking (2) is dus $D_{n-1} - D_{n-2}$ vermenigvuldigd met het quotiënt s van de snelheden.

Betrekking (2) zegt in feite dat de onderlinge afstand tussen de punten D_n iedere keer afneemt met een factor s. Rekenend vanaf het begin is de afstand tussen twee opeenvolgende punten:

(3)… $D_n - D_{n-1} = D \times s^{n-1}$

Optellen van de onderlinge afstanden (3) geeft als oplossing voor D_n:

(4)… $D_n = D \times (1 + s + s^2 + \ldots + s^{n-1})$

Uitdrukking (4) bevat de partiële som van een meetkundige rij, waarvoor, met $s \neq 1$, een bekende formule geldt (ga na):

(5)… $1 + s + s^2 + \ldots + s^{n-1} = (1 - s^n)/(1 - s)$

Definiëren we:

(6)… $X = D/(1 - s)$

dan wordt formule (4), met $n \geq 0$:

(7)… $D_n = X \times (1 - s^n)$

Voor grote n gaat s^n naar 0 als $|s| < 1$. Daarom gaat D_n naar X, en volgt uit (5) de som van een meetkundige rij:

(8)… $1 + s + s^2 + \ldots + s^n + \ldots = 1/(1 - s)$

Vergelijken we formule (1), $R_n = 1 - (½)^n$, met (7), $D_n = X \times (1 - s^n)$, dan blijkt dat de rijen R_n en D_n een grote gelijkenis vertonen. Voor $s = ½$, het geval dat Achilles twee keer zo snel is als de schildpad, is de verdeling van de punten R_n en D_n zelfs identiek, afgezien van een schalingsfactor $X|_{s=½} = 2D$, volgens definitie (6). Achilles loopt in de *Dichotomie* langs de punten R_n richting 1. Achilles en de schildpad lopen in hun race elk voor zich langs de punten D_n richting het punt X.

We zien dat de twee paradoxen in wezen overeenkomen.

Het probleem

Beide paradoxen vertellen een verhaal met een onzinnige afloop, zoveel is duidelijk. Om de *Dichotomie* 'op te lossen' wordt vaak opgemerkt dat de limiet van de totale lengte van de deeltrajecten gelijk is aan 1 (dit is eenvoudig in te zien en volgt ook uit (8)):

(9)… $½ + ¼ + ⅛ + \ldots + (½)^n + \ldots = 1$

De berekening van deze limiet van de lengte voegt overigens niets toe aan wat we al wisten, namelijk dat het punt 1 de limiet is van de rij punten $R_n = 1 - (½)^n$.

Uit (9), een oneindige som met een eindige

waarde, zou volgen dat Achilles wel degelijk aankomt op het eindpunt 1 van het traject. In veel artikelen wordt de kwestie zo afgedaan. Maar is deze limietbeschouwing wel een afdoende verklaring? Rechtvaardigt de constatering van de limietwaarde de conclusie dat Achilles de eindstreep bereikt? Er is geen laatste deeltraject dat precies op de finish uitkomt. Dus hoe arriveert hij bij zijn doel? Mij heeft het gebruikelijke verhaal van de limiet nooit overtuigd. Voor *Achilles en de schildpad* kunnen we eenzelfde limietbeschouwing houden, die net zo min een bevredigende uitleg vormt. Blijft dus de vraag wat er aan de hand is. Beide paradoxen vertellen een verhaal met een onzinnige afloop, maar het is lastig aan te geven wat er aan de redenering niet klopt.

De uitleg

Om vat te krijgen op de paradoxen kiezen we als uitgangspunt dat iemand in staat is een afstand af te leggen tussen twee punten. Op de reële rechte representeren we dat met een begrensd en gesloten interval, ofwel een segment. Het segment $[a,b]$ bijvoorbeeld stelt het traject voor van het punt a naar het punt b ($a < b$). Het zal straks van wezenlijk belang blijken te zijn dat de randpunten a en b zijn inbegrepen en dat we het dus hebben over het gesloten interval $[a,b]$, en niet over een (half)open interval (a,b), $[a,b)$ of $(a,b]$. Interpreteren we de *Dichotomie* in termen van achtereenvolgende segmenten, dan wordt de beweging van Achilles beschreven door het pad:

$[0, ½], [½, ¾], [¾, ⅞], \ldots, [R_n, R_{n+1}], \ldots$

Ook al verloopt de beweging vloeiend, op het niveau van de beschrijving zijn de segmenten bepalend. Alle gesloten intervallen $I_n = [R_n, R_{n+1}]$ samen vormen het halfopen interval $[0,1)$. Immers, elke I_n valt binnen $[0,1)$, en omgekeerd ligt elk punt van $[0,1)$ in een zekere I_n. Deze vergelijking kan niet worden doorgetrokken naar het gesloten interval $[0,1]$, want geen enkele I_n bevat het punt 1. We hebben nu een belangrijk verschil boven tafel gekregen. De *Dichotomie* bestrijkt slechts $[0,1)$, en niet het gehele traject $[0,1]$:

$[0, ½], [½, ¾], [¾, ⅞], \ldots, [R_n, R_{n+1}], \ldots = [0,1) \neq [0,1]$

Oneindig veel stappen … doel onbereikbaar …

De 'truc' van de *Dichotomie* is de beperking tot $[0,1)$. Zeno suggereert dat het traject $[0,1]$ kan worden opgesplitst in oneindig veel delen, maar in zijn constructie met de rij R_n is het eindpunt 1 buiten beschouwing komen te liggen. De voorgestelde gang van zaken beperkt zich in feite tot het gedeelte voor het einde, en zegt niets over het einde zelf. De finish is buiten bereik, bestaat in de beschrijving eenvoudigweg niet. Betrekken we het tijdsverloop erbij, dan is ook dat slechts op een halfopen interval gedefinieerd.

Juist op het moment dat Achilles de finish zou passeren, lost de definitie van zijn beweging op in het niets. De paradox spreekt zich niet uit over wat er daarna gebeurt. Merk op dat Achilles op elk punt van $[0,1)$ slechts eindig veel deeltrajecten heeft afgelegd. De kwestie – in sommige artikelen opgeworpen – dat hij op de finish oneindig veel deeltrajecten zou hebben afgelegd, is niet aan de orde. Hij komt immers niet op de finish.

Eindig veel stappen … geen paradox …

Wat kunnen we zeggen over $[0,1]$, het gehele traject inclusief de finish? Het is triviaal dat er verdelingen in eindig veel aaneensluitende gesloten intervallen zijn, bijvoorbeeld het pad: $[0, ½], [½, ¾], [¾, ⅞], \ldots, [R_{100}, 1] = [0,1]$, met $R_{100} = 1 - (½)^{100}$.

De volgende vraag is of $[0,1]$ ook in oneindig veel segmenten kan worden opgedeeld. Nee, luidt het wellicht verrassende antwoord. De lezer mag proberen een oneindige opdeling te vinden, maar dat zal niet lukken. Voor een wiskundig bewijs is natuurlijk meer nodig dan dat tot nu toe niemand een oplossing heeft gevonden.

Er moet worden bewezen dat het hoe dan ook niet kan, op geen enkele manier. Dat bewijs kan worden geleverd met de theorie van de zogenoemde metrische ruimten (met het begrip compactheid en de stelling van Heine-Borel). Voor nu nemen we het aan op basis van onze visualisatie. Geen oneindigheid te bekennen dus, en ook geen paradox (wel een prikkelende vraag: merk op dat het feit dat een segment noodzakelijkerwijs uit slechts eindig veel stukken bestaat, ingrijpt op de gangbare gedachte dat een continuüm 'oneindig deelbaar' is – dus wat betekent 'oneindig deelbaar' eigenlijk precies?). De 'truc' van de *Dichotomie* is de beperking tot $[0,1)$, die volgt uit de vereniging van oneindig veel segmenten, terwijl het volledige traject $[0,1]$ alleen verdelingen in eindig veel aaneensluitende gesloten intervallen toelaat.

Achilles en de schildpad maakt het nog bonter. Het scenario richt zich alleen op het gedeelte waar de schildpad voorop loopt, en laat het inhalen en uitlopen door Achilles al bij voorbaat weg. De uitleg is analoog. Het beschouwde deel $[0, X)$ kan worden gezien als aaneenschakeling van oneindig veel segmenten $[D_n, D_{n+1}]$:

$[0, D], [D, D_2], [D_2, D_3], \ldots, [D_n, D_{n+1}], \ldots = [0, X) \neq [0, X]$

maar voor het eigenlijke traject $[0, X]$ is een verdeling in oneindig veel stukken niet mogelijk.

De kern

Wat is de kern van de zaak? In onze voorstelling van de werkelijkheid haalt Achilles de finish, respectievelijk haalt hij de schildpad in; in de formuleringen met het oneindig aantal stappen niet. Op basis van de rijen R_n en D_n zijn de uitkomsten van de paradoxen geldig. De rijen omvatten echter niet de hele situatie. Ze schieten letterlijk tekort. Een eindige beschrijving daarentegen volstaat en heeft niets geheimzinnigs. De moraal van het verhaal is dat het een andere kijk op de zaak vergt om de verwarring te verdrijven.

Literatuur

Boeken met beschouwingen over de paradoxen van Zeno:

- Marilyn vos Savant (1993): *The world's most famous math problem*. New York: St. Martin's Press. Een beknopt boekje over het bewijs van de laatste stelling van Fermat en andere wiskundige mysteries.
- Wesley C. Salmon (ed.): *Zeno's paradoxes*. Indianapolis: Hackett Publishing Company; reprint 2001. Een standaardwerk met bijdragen van verschillende auteurs.
- Michael Clark (2002): *Paradoxes from A to Z*. Londen: Routledge. Een overzicht van filosofische paradoxen met korte analyses.
- Joseph Mazur (2007): *The motion paradox - the 2,500-year-old puzzle behind all the mysteries of time and space*. New York: Dutton Adult (Penguin). Een populariserende verhandeling die de paradoxen in een brede wiskundige en natuurkundige context plaatst.

Boeken met de theorie van metrische ruimten:

- Gerald A. Edgar (1990): *Measure, topology, and fractal geometry*. New York: Springer-Verlag; Undergraduate Texts in Mathematics. Behandelt een aantal basisbegrippen als ondergrond voor de studie van fractals.
- Wilson A. Sutherland (1975): *Introduction to metric & topological spaces*. Oxford: Oxford University Press; 2nd edition, 2009. Geeft een uitgebreide behandeling.

Over de auteur

Rik Biel (1965) heeft wiskunde gestudeerd aan de Rijksuniversiteit Groningen, afstudeerrichting Technische Mechanica, gevolgd door de ontwerpersopleiding Computational Mechanics. Hij heeft een loopbaan als project- en lijnmanager in het bedrijfsleven en is geïnteresseerd in de grondslagen van de wiskunde.

Breuken op de basisschool

[Lonneke Boels]

Veel wiskundedocenten gaan ervan uit dat leerlingen alle 'standaardregels' voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen van breuken op de basisschool hebben gehad als ze in de brugklas van het vmbo, de havo of het vwo komen (***zie figuur 1***). Maar niets is minder waar.
Wat hebben de leerlingen dan wél gehad?
De leerlijn breuken op de basisschool is opgebouwd uit drie stappen:

- het concrete niveau;
- het schematische niveau;
- het formele niveau.

Het *concrete niveau* bij breuken bestaat uit het eerlijk verdelen van pannenkoeken, pizza's, taarten, repen chocolade, enz. Bovendien worden lengten gemeten met breukenstroken. Iemand is dan bijvoorbeeld 8 stroken en 3 stukjes van de ¼-strook lang. Dus $8\frac{3}{4}$ stroken lang; ***zie figuur 2***.
Het *schematische niveau* bij breuken bestaat uit het gebruik van stroken, cirkels, roosters (zoals repen), verhoudingstabellen, etc.; zie bijvoorbeeld ***figuur 3***. De derde stap is het werken met mentale berekeningen. Hoewel in groep 5 soms al voorzichtig een begin met breuken wordt gemaakt door bijvoorbeeld te spreken over een halve taart, begint de echte leerlijn breuken doorgaans pas in groep 6 met concreet materiaal. Eerst komen de begrippen half en kwart aan bod. Van de leerlingen die naar het vmbo-basis of -kader gaan, verwacht men dat zij in de toekomst enkele eenvoudige (stam)breuken kennen (1F-niveau rekenen; zie [2]) zoals (veelvouden van) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$. Een stambreuk is een breuk met teller 1.
Het *formele niveau* van breuken komt op de basisschool beperkt aan bod. Het formele niveau is het rekenen met kale opgaven. Het verschilt enigszins per methode en de allernieuwste versies van de rekenmethoden gaan hierin vaak verder dan de oude versies. Wat leerlingen vaak wel gehad hebben, is het optellen en aftrekken van breuken op formeel niveau dus met kale opgaven. Vermenigvuldigen en delen van breuken komt in de veel methoden niet verder dan het schematische niveau – als men daar al terecht komt.
Wat bij breuken bovendien lastig is, is dat breuken zowel absolute getallen zijn als relatieve begrippen. De breuk 'als deel van' (relatief) komt meestal in groep 6 aan bod en de breuk als vast getal in eind groep 6 of groep 7 (absoluut). Voor leerlingen die naar het vmbo-basis of -kader gaan, geldt vaak dat zij vanaf groep 5/6 een eigen programma volgen. Helaas komt dit er vaak op neer dat ze in groep 8 pas de boeken van groep 6 (of nog net het eerste deel van groep 7) doorwerken. Dit betekent dat het leeuwendeel van het breukenonderwijs aan deze leerlingen voorbij gaat. Uw vmbo-leerlingen hebben dus volkomen gelijk als ze zeggen dat ze veel standaardregels voor breuken nooit hebben gehad – dat hebben ze inderdaad niet. Een feit dat overigens al veel eerder door anderen is geconstateerd (zie [9]).
Maar datzelfde geldt ook voor de meeste leerlingen die naar de havo en het vwo gaan. We komen maar enkele standaardregels tegen in de meeste basisschoolboeken. Om de opbouw van de leerlijn goed te kunnen volgen bekijken we één methode: *Rekenrijk* van Noordhoff Uitgevers. Het blijkt echter dat de genoemde voorbeelden van *Rekenrijk* voor veel methoden gelden (zie o.a. [4]). In groep 6 wordt er gerekend met het optellen van gelijknamige breuken en het vermenigvuldigen van een breuk met een getal; ***zie figuur 3***. Pas veel later komt de breuk als operator aan bod, namelijk ergens in februari/maart in groep 6; ***zie figuur 4***. De breuk als vast getal wordt in *Rekenrijk* eind groep 6 geïntroduceerd, ergens kort voor de zomervakantie (***zie figuur 5***). De koppeling met de breuk als operator blijft daarbij aanwezig. In de methode wordt bovendien ook de breuk als meetgetal geïntroduceerd en wordt de relatie met procenten en decimale getallen gelegd – in dit artikel ga ik daarop verder niet in.

Breuken met inzicht
$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$ *: je verdeelt een lijnstuk met lengte* $\frac{1}{3}$ *in twee gelijke stukken.* […]
Het resultaat is […] $\frac{1}{6}$.
In de bron is hierbij een plaatje getekend.

De nadruk ligt in groep 7 op het handig en met inzicht rekenen met breuken. Het is zoals de meeste wiskundedocenten het waarschijnlijk zelf ook zouden oplossen en wat ik in mijn cursussen wel de plusvariant noem – de variant voor potentiële havo/vwo'ers… Daarbij gebruik je de standaardregels alleen maar als het niet anders kan, en in de basisschoolboeken kan het (bijna) altijd anders! Ook de studenten op de pabo krijgen deze – op inzicht gebaseerde – regels voorgeschoteld; zie bijvoorbeeld het kader (uit [6]). Maar ook in het *Basisboek Rekenen* wordt bij breuken met 'inzicht' gerekend door voorafgaand aan de vermenigvuldiging te vereenvoudigen (ook wel wegstrepen genoemd; zie [7]; p. 88). De uitleg hoe en waarom dit zo werkt, ontbreekt in deze bron.

Handig verdelen

De op inzicht gebaseerde berekeningen bij breuken in de basisschoolboeken van groep 7 worden met schema's en tekeningen ondersteund: het schematische niveau. Hieronder drie voorbeelden. In mijn uitleg aan leerlingen van groep 7 [a] krijgen de drie varianten uit *Rekenrijk* de volgende naam: handig verdelen, stukjes tellen en splitsen.
Het eerste type opgaven is een opgave die je makkelijk kunt verdelen. Een voorbeeld hiervan is de opgave $\frac{1}{3}\times 6\frac{3}{5}$. Deze opgave wordt gesplitst in $\frac{1}{3}\times 6$ en $\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}$. Vanuit de context met pizza's of chocoladerepen is dit een natuurlijke splitsing: $\frac{1}{3}\times 6\frac{3}{5} = 2\frac{1}{5}$.
Deze methode gebaseerd op de distributieve eigenschap kennen leerlingen (en pabo-studenten) ook al uit andere delingen; bijvoorbeeld:
208 : 8 = 160 : 8 + 48 : 8

Stukjes tellen

Een voorbeeld van een opgave met stukjes tellen is $\frac{1}{3}\times 7\frac{1}{2}$. Je kunt hierbij $7\frac{1}{2}$ pizza tekenen en de 7 pizza's halveren. Je hebt dan 15 stukjes. En daar neem je ⅓ deel van. Je krijgt dus $\frac{1}{3}\times\frac{15}{2} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$. Het vooraf vereenvoudigen wordt hier dus op een natuurlijke manier en redenerend vanuit een context gedaan; ***zie figuur 6***. Aangezien we niet meer met echte pizza's werken, is dit een opgave op het schematische niveau.

Regels breuken

Optellen/aftrekken
- Stop de helen in de breuk
- Maak de noemers gelijk
- Tel de tellers op

Dus $\dfrac{\text{teller1} + \text{teller2}}{\text{gelijke noemer}}$

- Haal de helen eruit en vereenvoudig

Vermenigvuldigen/Delen
- Stop de helen in de breuk
- Alleen bij delen: draai de 2e breuk om
- $\dfrac{\text{teller} \times \text{teller}}{\text{noemer} \times \text{noemer}}$
- Haal de helen eruit en vereenvoudig

figuur 1 Breuken bij wiskunde – standaardregels optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Bij de plusvariant worden de helen niet in de breuk gestopt (zie [1]).



figuur 2 Start breuken in groep 6

Drie kinderen verdelen vijf pannenkoeken.
Hoeveel krijgt één kind?

$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ en $\frac{2}{3}$

of

$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ en $\frac{2}{3}$

5 keer $\frac{1}{3} = \frac{5}{3} = 1$ en $\frac{2}{3}$

Hoeveel krijgt elk kind?

Kleur dat eerst.

a Drie kinderen verdelen vier pannenkoeken. plussom: ....

$8 \times 2\frac{1}{2} =$	$9 \times 3\frac{1}{3} =$	$16 \times 6\frac{1}{4} =$	$6 \times 6\frac{1}{6} =$
$8 \times 12\frac{1}{2} =$	$90 \times 3\frac{1}{3} =$	$32 \times 6\frac{1}{4} =$	$18 \times 6\frac{1}{6} =$
$8 \times 22\frac{1}{2} =$	$99 \times 3\frac{1}{3} =$	$64 \times 6\frac{1}{4} =$	$54 \times 6\frac{1}{6} =$

figuur 3 Optellen en vermenigvuldigen van breuken in groep 6. De kinderen moeten de som op twee manieren kleuren: de plussom en de keerom. Uit: *Rekenrijk*, 3e editie, groep 6a, blok 5, les 3.

a Anoek moet 18 km fietsen.
Zij heeft $\frac{1}{3}$ deel van de weg gefietst.
($\frac{1}{3}$? — 0 ... km ... km 18 km)

b Henk moet 24 km rijden.
Hij heeft $\frac{2}{3}$ deel afgelegd.
($\frac{2}{3}$? — 0 ... km ... km 24 km)

c Kwasi moet 240 km fietsen.
Hij heeft $\frac{1}{6}$ deel afgelegd.
($\frac{1}{6}$? — 0 ... km ... km 240 km)

$\frac{3}{5} \times 100 = \frac{3}{5}$ van 100 =	$\frac{1}{2}$ van 1 000 =	$\frac{3}{8}$ van 1 000 =
$\frac{4}{5} \times 100 = \frac{4}{5}$ van 100 =	$\frac{1}{4}$ van 1 000 =	$\frac{5}{8}$ van 1 000 =
$\frac{3}{4} \times 100 = \frac{3}{4}$ van 100 =	$\frac{1}{8}$ van 1 000 =	$\frac{7}{8}$ van 1 000 =

figuur 4 Breuk als operator. Uit: *Rekenrijk*, 3e editie, 6b, blok 9, les 1.

Splitsen

Het derde type is het type dat je met splitsen kunt oplossen. Deze lijkt op 'handig verdelen', maar hierbij splits je het hele getal eerst in twee delen om vervolgens een combinatie van de vorige twee typen toe te passen. Deze methode kan worden toegepast op de eerder genoemde opgave: $\frac{1}{3} \times 7\frac{1}{2}$. We splitsen deze dan in:
$\frac{1}{3} \times 6 + \frac{1}{3} \times 1\frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$
In groep 8 wordt het rekenen met breuken nog een keer herhaald maar dan vrijwel alleen voor de leerlingen die extra stof aankunnen (bijvoorbeeld: *Rekenrijk*, 2e editie, groep 8a, blok 1, les 9, opgave 7; blok 2, les 2, opgave 6. De kleuring van de opgaven geeft aan dat deze alleen voor bepaalde leerlingen zijn). Hier wordt ook het vermenigvuldigen van twee stambreuken behandeld waarbij de methode 'stukjes tellen' wordt aangemoedigd. Hiertoe wordt de tweede stambreuk omgezet in een 'handige' breuk; bijvoorbeeld:
$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$
Maar nogmaals: vrijwel alle vmbo-leerlingen en veel havo-leerlingen zijn nu al lang afgehaakt. Toen ik op de basisschool voor de klas stond, had ik in groep 8 twee leerlingen die nog in de boeken van groep 6 van *Rekenrijk* werkten. Destijds was ik daarover heel verbaasd maar het blijkt voor vmbo-BK-leerlingen op heel veel basisscholen de gewoonte te zijn.
Het is overigens niet de bedoeling van de makers van de boeken! Het idee is juist dat leerlingen in elk geval de basisstof uit de boeken van groep 7 en 8 krijgen aangeboden om te voorkomen dat hun achterstand nog groter wordt.

Ergens in de eerste helft van groep 8 komen de gemengde breuken vermenigvuldigen aan bod (*Rekenrijk*, 2e editie, groep 8a, blok 3, les 10, opgave 2). Merk op dat het optellen van breuken dan al lang niet meer herhaald is en dat het optellen van lastige ongelijknamige breuken nog niet is behandeld. Voor het uitrekenen van $1\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2}$ wordt een rooster getekend van 2 bij 4 waarin een gebied van $1\frac{1}{2}$ bij $3\frac{1}{2}$ grijs is gekleurd. Door het tellen van de hele, halve en kwart vakjes kun je zo op het antwoord $3 + 4 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ komen. Er wordt enkele opgaven later aangestuurd op het 'splitsen':
$1\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2} = 1 \times 3\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2}$
Merk op dat we hier nog steeds op het schematische niveau werken, in dit geval met roosters. Ook in de voorbeelden hierna is de koppeling met het schematische niveau nog steeds aanwezig.

De regel dat het delen door een breuk hetzelfde is als het vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk, komt niet in *Rekenrijk* voor. Dergelijke regels passen bij het derde niveau van een leerlijn – het formele niveau. Het delen van breuken wordt in *Rekenrijk* met de getallenlijn of de verhoudingstabel gedaan – dat laatste zoals ook in het boekje *Aanpak. Rekenen voor de brugklas* dat we destijds op het Alfrink College gebruikten om leerlingen van de brugklas havo/vwo bij te spijkeren met rekenen; zie [3]. Dat is dus op het schematische niveau. ***In figuur 7*** is een voorbeeld van zo'n dubbele getallenlijn gegeven. Merk op dat ook hier weer eerst van een concrete context wordt uitgegaan: Hoeveel glazen van ¼ liter cola kun je uit één fles van 1½ liter schenken? In [4] wordt uitgebreider ingegaan op het rekenen met breuken op de basisschool. In [8] staat een voorbeeld van een formele rekenregel voor delen door een breuk: *Moet je delen? Zorg voor helen!* Ook dit is dus een andere regel dan de regel die in veel wiskundeboeken wordt gebruikt en deze is niet zondermeer toepasbaar op alle opgaven waarin (gemengde) breuken worden gedeeld.

Wie de leerlijn breuken bekijkt, komt dus vrijwel geen enkele 'standaardregel' tegen. De enige regel die in alle boeken wordt behandeld, gaat over het gelijknamig maken van breuken. Sommige kinderen hebben op de basisschool toch geleerd dat je bij vermenigvuldigen van breuken de tellers en noemers moet vermenigvuldigen omdat hun meester of juf dit zelf aan de kinderen heeft geleerd. In uw wiskundelessen mag u daar dus niet vanuit gaan. Sterker nog, mijn studenten op de pabo leren dat 'vaak … pas op de middelbare school op formeel niveau met breuken [wordt] gerekend'; zie [5]. Dit betekent mijns inziens dat in de wiskundeboeken van de middelbare school de stap van schematisch naar formeel niveau moet worden gemaakt. Hiervoor is het noodzakelijk dat eerst het schematische niveau wordt opgefrist – iets wat in de huidige wiskundeboeken nu helemaal niet of slechts mondjesmaat gebeurt.

Noot

[a] In mijn praktijk geef ik bijles rekenen aan leerlingen van groep 6, 7 en 8.

Bronnen

[1] Nascholingsmateriaal rekencursus voor wiskundedocenten vmbo, mbo, havo en vwo van Alaka. Dit materiaal wordt ook gebruikt bij cursussen voor ouders van groep 8 en van middelbare scholieren.

[2] H.P. Meijerink e.a. (2009): *Rapport Doorlopende Leerlijnen Rekenen.* Enschede: SLO. Digitaal toegankelijk via: *www.slo.nl/downloads/2009/referentie-kader-taal-en-rekenen-referentieniveaus.pdf.*

[3] J. Postema: *Aanpak. Rekenen voor de brugklas.* Groningen: Wolters-Noordhoff.

[4] Petra van den Brom-Snijders e.a.: *Gebroken getallen. Reken-wiskundedidactiek.* Amersfoort: ThiemeMeulenhoff. Met name het zogenoemde deel B binnen dit boek is voor wiskundedocenten zeer interessant door de vele voorbeelden uit verschillende rekenmethoden.

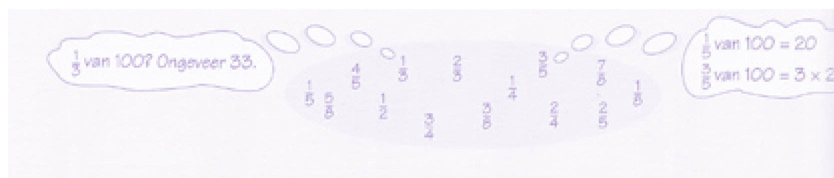
[5] Wil Oonk e.a.: *Rekenen – wiskunde in de praktijk / Bovenbouw.* Groningen: Noordhoff Uitgevers.

[6] Ed de Moor e.a.: *Basisvaardigheden Rekenen Pabo.* Groningen: Noordhoff Uitgevers; 2e herziene druk.

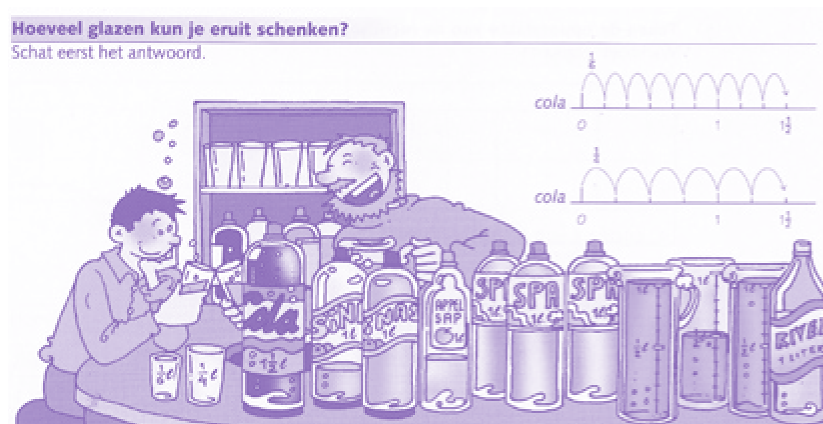
[7] Jan van de Craats, Rob Bosch: *Basisboek Rekenen.* Amsterdam: Pearson Education Benelux bv.

[8] G. Boersma e.a.: *Pluspunt.* 's-Hertogenbosch: Malmberg; nieuwste editie, groep 8, blok 9, les 3.

[9] Truus Dekker en Martin Kindt (2006): *Wat doen we (niet) met breuken.* In: *Nieuwe Wiskrant* 26 (2 december 2006).



figuur 5 Breuk als getal. Uit: Rekenrijk, blok 9, weer. De breuk als getal is eerder in dit blok in een klassikale les aan de orde geweest. De uitleg komt echter bij het 'weer' duidelijker naar voren. Het deel 'weer' is herhaling voor leerlingen die de toets onvoldoende hebben gemaakt. Daarnaast bevat *Rekenrijk* een deel 'meer' waarin juist extra uitdaging wordt geboden voor leerlingen die dat aankunnen.



figuur 7 Dubbele getallenlijn. Uit: *Rekenrijk*, groep 8a, blok 4, les 3, opgave 1.

Bij het delen van breuken kun je verschillende gevallen onderscheiden.

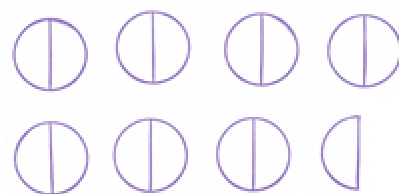
Een breuk delen door een heel getal
$\frac{2}{3}:5$ komt overeen met $\frac{1}{5}$ deel nemen van $\frac{2}{3}$ dus $\frac{2}{3}:5=\frac{1}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{15}$

Een heel getal delen door een breuk
$2:\frac{1}{3}$ komt overeen met 'hoeveel maal past $\frac{1}{3}$ op 2?',
of: 'hoeveel maal past $\frac{1}{3}$ op $\frac{6}{3}$?'.
Dus $2:\frac{1}{3}=\frac{6}{3}:\frac{1}{3}=6:1=6$

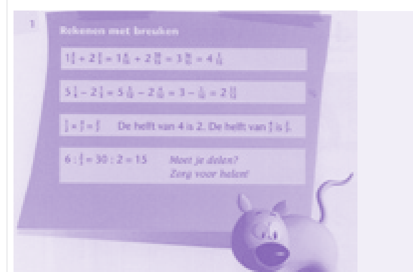
Een breuk delen door een breuk
- $\frac{4}{5}:\frac{2}{3}$ komt overeen met 'hoeveel maal past $\frac{2}{3}$ op $\frac{4}{5}$?',
  of: 'hoeveel maal past $\frac{10}{15}$ op $\frac{12}{15}$?'.
  Dus $\frac{4}{5}:\frac{2}{3}=\frac{12}{15}:\frac{10}{15}=12:10=1\frac{2}{10}=1\frac{1}{5}$
- Je kunt ook deler en deeltal vermenigvuldigen met 15. Je raakt dan de breuken kwijt: $(15\times\frac{4}{5}):(15\times\frac{2}{3})=12:10=1\frac{2}{10}$
- $\frac{2}{3}$ en $\frac{3}{2}$ heten **elkaars omgekeerde** omdat $\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}=1$.
  Je kunt in de voorgaande opgaven de deler altijd 1 maken door die met zijn omgekeerde te vermenigvuldigen. Maar dan moet je dat ook met het deeltal doen. Dit is vooral in het laatste geval een handige regel:
  $\frac{4}{5}:\frac{2}{3}=(\frac{3}{2}\times\frac{4}{5}):(\frac{3}{2}\times\frac{2}{3})=(\frac{3}{2}\times\frac{4}{5}):1=\frac{12}{10}$ of heel kort $\frac{4}{5}:\frac{2}{3}=\frac{3}{2}\times\frac{4}{5}=\frac{12}{10}$

Let op!
- Leer geen onbegrepen regels uit je hoofd.
- Je kunt de breukenregels begrijpen en onthouden als je er een echte situatie bij denkt.
- Het kennen van gelijkwaardige breuken is heel belangrijk.

figuur 8 Verschillende methodes om breuken op elkaar te delen met een uitleg waarom de standaardregel (delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde) werkt. Uit: [6].



figuur 6 – $\frac{1}{3}\times7\frac{1}{2}$ kan worden uitgerekend door het tellen van het aantal (halve) stukjes en daar 1/3 deel van te nemen.



figuur 9 Rekenregels breuken. Uit: *Pluspunt*, groep 8.

Over de auteur
Ir. Lonneke B.M.M. Boels is wiskundedocent op het Christelijk Lyceum in Delft, geeft rekendidactiek aan de pabo van de Haagse Hogeschool en is directeur van Alaka, reken-wiskundelessen en -projecten. Zij geeft o.a. nascholingscursussen rekenen aan docenten van vmbo, mbo, havo en vwo scholen.

E-mailadres: *info@alaka.nl*

Verbazen, verbinden en gebruiken in de wiskundeles

VERSLAG VAN DE 9E WISKUNDECONFERENTIE

[Joke Verbeek en Gert de Kleuver]

De negende Wiskundeconferentie voor docenten wiskunde in het vmbo en onderbouw havo/vwo had bovenstaande titel als leidmotief. De op 31 januari 2011 in het APS-gebouw in Utrecht gehouden conferentie trok daarmee 92 belangstellenden, die zich allemaal hadden ingeschreven op minstens drie van de 27 aangeboden presentaties en workshops.
De belangstelling voor deze conferentie is daarmee constant en voorziet kennelijk in een behoefte die leeft bij docenten van de doelgroep. Zij zien op andere wiskundedagen vooral veel informatie voor de Tweede Fase havo/vwo langskomen en kunnen nu een keuze maken uit veel onderwerpen die allemaal betrekking hebben op het vmbo dan wel de onderbouw havo/vwo. Volgend jaar is het tweede lustrum en het kan geen kwaad alvast in te schrijven, want de eerste inschrijver werd ook nu weer beloond met een pittige bos bloemen.

MathMagic Show

De openingact werd verzorgd door Monica Neagoy uit de Verenigde Staten. Deze veeltalige dame met een graad in wiskunde maakt furore met een *Mathmagic Show* in een theater in Washington (***zie foto 1***).



foto 1

Ze was in Nederland voor een optreden op de Nationale Wiskundedagen, dus wie daar ook was, heeft haar twee keer kunnen bewonderen. De 'trucs' die zij het publiek voorschotelde, zijn bij de meeste wiskundedocenten wel bekend. Het raden van een getal, waarbij aan het publiek een aantal kaarten wordt getoond met de vraag 'Staat het getal op deze kaart?', is weliswaar overbekend, maar had een modern tintje gekregen doordat de kaarten met getallen werden geprojecteerd op een digibord. Voor wie de trucs nog nooit gezien of gedaan heeft, was het wellicht een inspiratiebron, vooral omdat de wiskundige achtergrond van de meeste trucs ook gegeven werd. De docenten werden ook aan het werk gezet om zelf een 4×4 magisch vierkant te vullen. Monica gaf een kleine aanwijzing en daarna kon men in de zaal aan de gang. De website van Monica laat weten dat haar voornaamste doel is leerlingen van een jaar of 13 te laten kennismaken met de magie van de wiskunde (*www.monicaneagoy.com*). Dat heeft zij dan gemeen met de docenten in de zaal. Om die docenten zelf te verbazen had ze wel wat minder bekende trucs mogen showen.
Na de openingsact waaierde iedereen uit naar de diverse zalen, terwijl de standhouders hun waren gingen uitpakken.
De titels van veel presentaties en workshops



foto 2

ademden een sfeer van verbazen: Mini-games bij wiskunde, The mathematics of beauty, Zandtekeningen en anamorfosen (***zie foto 2***, met Nico Laan), Ontdekkingsreis met wiskunde, Fractals knippen, Wiskundeprikkels, Wiskunde anders. Andere workshops waren praktischer van aard: computerexamens, werkvormen, zwakke of juist begaafde leerlingen, het digibord en vooral veel over het rekenen. Dat laatste houdt veel wiskundedocenten bezig, bleek wel uit de vele inschrijvingen en de vragen die erover gesteld werden.
Hieronder een impressie van enkele workshops.

Werkvormen

Met welke werkvormen houd je het automatiseren bij rekenen spannend? De docenten die zich voor deze werkgroep hadden ingeschreven hadden veelal al ervaring met het geven van rekenlessen. 'Er is veel gezucht en gesteun bij de digitale oefenstof', werd er gezegd en het was aan inleider Henk Logtenberg van het CPS die saaie rekenlessen te doen veranderen in levendige en effectieve lessen (***zie foto 3***).
'Teach what you preach' was kennelijk zijn motto, want hij lardeerde zijn presentatie met rekenintermezzo's die je zo in je lessen kunt integreren. Daarbij waarschuwde hij niet alle werkvormen, met name de competitieve, zo maar in te zetten. Voor sommige werkvormen heb je een goed pedagogisch klimaat nodig en onderling vertrouwen tussen leerlingen. Is dat er niet, dan kunnen zwakke rekenaars in hun schulp kruipen en bereik je een averechts effect.
Automatiseren is niet hetzelfde als memoriseren. Bij dat laatste leren leerlingen 'domweg' iets uit het hoofd.
Bij automatiseren komt het erop neer dat bepaalde rekenstrategieën worden





foto 3

geoptimaliseerd, zodat ze effectief gebruikt kunnen worden. Een voorbeeld hiervan is een optelling over een tiental heen, zoals 8 + 5. Bij memoriseren leren de leerlingen de uitkomst uit hun hoofd, bij automatiseren leren ze het tweede getal te splitsen, zodat de opgave wordt veranderd in 8 + 2 + 3. Deze laatste rekenstrategie is toepasbaar in veel situaties dus te prefereren boven memoriseren. Voor de tafels van vermenigvuldiging is het wel praktisch alle antwoorden bij de hand te hebben en is memoriseren een goede leerstrategie.
Lugtenberg verwacht dat leerlingen van havo/vwo nauwelijks moeite zullen hebben het gevraagde rekenreferentieniveau 3F te behalen. De problemen zullen in het vmbo liggen; die leerlingen moeten aan het eind van hun vierde jaar allemaal niveau 2F bereiken. De zwakke rekenaars in het vmbo hebben een beperkt werkgeheugen. Zij kunnen dus weinig leerstof vasthouden en die komt al helemaal niet terecht in hun lange termijngeheugen. Juist vanwege dat beperkte werkgeheugen is het bij hen van belang onmiddellijk feedback te geven. Dat kan prima bij de diverse rekenspellen die al dan niet klassikaal worden aangeboden. Er gaat een motiverende werking uit van een spelwerkvorm en het plezier in het spel maakt dat de leerling open staat voor de leerervaring.
Amerikaans onderzoek heeft uitgewezen dat er elke dag 10 minuten geoefend moet worden wil het een positief effect hebben. Dat kan dus kort: met flitskaarten, een rekenspel, kort achter de pc. Er zijn boeken, vooral Amerikaanse, met spellen op de markt waaruit je eindeloos kunt putten. En er zijn sites, o.a. van het Freudenthal Instituut, met rekenoefeningen.
Ziet u de leerlingen niet elke dag, dan is het maken van rekenafspraken met collega's de oplossing. Tenslotte zijn niet alleen de wiskundedocenten verantwoordelijk voor het rekenonderwijs in het vo!

Wiskunde zonder boek

'Ik moet nog een aantal jaren voor de klas. Hoe hou ik het voor mezelf nog leuk?', heeft Wim Grosheide zich een aantal jaren terug afgevraagd. Voor hem ging er weinig inspiratie meer uit van het lesgeven, ook al omdat de leerlingen nauwelijks geïnteresseerd leken. Op een dag vroeg hij een groep havo 4-leerlingen op te schrijven waar ze aan dachten tijdens zijn uitleg. Het resultaat was een serie opmerkingen die varieerden van *boring*, *bier*, en *weekend*, *saai* tot *pauze* en *jongens*. Er was er niet een die meedacht. 'Tja, en dan kun je wel meer van hetzelfde gaan doen, maar daar raken leerlingen heus niet door gemotiveerd', vervolgt hij zijn verhaal laconiek. Hij realiseerde zich dat het roer om moest. Hij begon met nadenken over het lesgeven zonder boek.
Grosheide kreeg die kans van zijn school, het Wesselink College in Amstelveen, waar nu in leerjaar 1 en 2 helemaal en in leerjaar 3 gedeeltelijk zonder boek gewerkt wordt. Wat hij de leerlingen wilde leren, haalde hij uit zijn jarenlange ervaring als bovenbouwdocent.
Het eerste domein dat hij aanpakte was algebra. Daar hadden leerlingen altijd veel moeite mee. 'Een deel van de motivatie halen leerlingen uit het feit dat ze het snappen', dacht hij, dus ontwikkelde hij een leergang algebra op de computer waarbij de leerlingen eindeloos kunnen oefenen, net zolang tot ze het snappen. Hij gebruikte hiervoor Geogebra. 'Dat computerprogramma is niet zo maar in te zetten. Je moet wat tijd steken in het opzetten van een leerlijn en het programma vullen met eigen opgaven. Maar als je het eenmaal hebt, is het vele jaren te gebruiken. Ik heb die tijdsinvestering gedaan omdat ik de garantie kreeg dat ik in de onderbouw zou blijven lesgeven. Dat maakt het rendabel.'
Voor de andere onderwerpen maakte hij modules. Hij heeft ook modules van Malmberg gebruikt, maar de meeste modules maakte hij helemaal zelf. Trots laat hij een aantal eindproducten zien: een griottenpracticum over ruimtefiguren, een formuleboekje, een drieluik over Pythagoras, een filmpje op YouTube waarin hij een uitleg geeft. 'Zo'n filmpje kunnen de leerlingen eindeloos afdraaien, net zolang totdat ze het snappen. Dan heb ik de handen vrij voor andere dingen', houdt hij zijn aandachtige gehoor voor.
De leerlingen krijgen een map met opdrachten met planningen en een structuur. Daarbij worden alle vaardigheden ingezet. Er zijn altijd keuzes te maken, en niet alleen het eindproduct maar ook het proces wordt beoordeeld. Dat werkt motiverend. Inmiddels is wiskunde bij een ruime meerderheid van de leerlingen het lievelingsvak.
Iedereen die meer wil weten, kan op de site gaan kijken: Wiskunde zonder boek (*www.wiskundezonderboek.nl*).

Pilot computerexamen KB

Melanie Steentjes van Cito gaf veel uitleg aan een groot publiek over de pilot van het computerexamen KB. In 2007 hoorde Melanie voor het eerst dat na een BBL-examen er ook een KB-examen moest worden ontwikkeld. Bij een KB-examen was het echt lastiger, vond Melanie, omdat de complexiteit in de opgaven en uitwerkingen groter is. Neem maar als voorbeeld de stelling van Pythagoras. Leerlingen moesten kwadraten kunnen intypen. Afgelopen jaar had men gebruikt gemaakt van een toolbox. Hierdoor werden de leerlingen uit hun concentratie van de opgave gehaald. Leerlingen moesten uitwerkingen overtypen. Er was ook een ontwikkeling in de rekenmachine. Nu liet Melanie een rekenmachine zien die alle berekeningen bewaarde. Docenten konden dan later, bij het nakijken, zien wat de leerlingen hadden ingetoetst. Eerst kwam het voor dat bij de *delete*-toets alle berekeningen weg waren. Later verdween alleen de laatst invoerde regel.
Er werden opgaven getoond. We zagen dat er voor de leerlingen inderdaad alles wat zij in de rekenmachine intypten, ook bewaard bleef. Een eigen rekenmachine hadden de leerlingen niet meer nodig; een kladpapiertje was wel nodig. Dat moest wel aan de leerlingen geleerd worden. Zij hadden vaak de neiging om dit niet of veel te laat te gebruiken.
Een van de gemaakte opmerkingen was dat de wiskundedocent veel aandacht aan het opschrijven van de uitwerkingen besteedde en dat was nu gewoon niet nodig. Verder konden de docenten het examen alleen op school nakijken. Als laatste werd nog gesproken over wel of geen tweede corrector. Voordelen waren er ook. De opgaven kunnen worden voorzien van filmpjes en kunnen ook veel kleurrijker worden. Er zijn veel verschillende versies zodat scholen flexibel het examen konden afnemen. Voor dyslectische leerlingen was het ook prettiger. Dit werd door Melanie aangevoerd.
Al met heel informatief. De ontwikkelingen gaan door, niet alleen in de soort opgaven, maar zeker ook in de software.
Enkele laatste getallen: van de 152 leerlingen gaf 75% de voorkeur aan een computerexamen. Bij de docenten was 66% positief over deze wijze van examineren.

Over de auteurs

Joke Verbeek is docent op het Arentheem College Arnhem en redactielid van *Euclides*.
Gert de Kleuver is afdelingleider op het Ichthus College te Veenendaal.
E-mailadressen: *jokeverbeek@chello.nl* en *g.de.kleuver@gmail.com*

De sinus

VAN MEETKUNDIGE DEFINITIE NAAR ANALYTISCH BEGRIP

[Martin Alberink, Heleen Muijlwijk en Mark Timmer]

Hoe maakt een leerling de overstap van de sinus in een rechthoekige driehoek naar de sinus als functie? Deze vraag stond centraal toen wij gezamenlijk een les ontwierpen in het kader van onze opleiding aan de Universiteit Twente tot eerstegraads wiskundedocent. Het doel was om gezamenlijk grondig een les voor te bereiden, de les te geven en te evalueren. We kozen ervoor om in de les een inleiding te geven op de sinus als functie, met als uitgangspunt de meetkundige kennis van de sinus.
In dit artikel beschrijven wij onze motivatie voor het maken van een ontwerp van deze les, onze lesdoelen en het lesontwerp, en bespreken wij onze bevindingen. Wellicht kan dit andere (beginnende) docenten ondersteunen in hun eigen lessen over dit onderwerp. In onze les wordt immers expliciet en uitgebreid stilgestaan bij de relatie tussen het meetkundig en analytisch begrip van de sinus, wat naar ons idee een belangrijk onderdeel van de begripsvorming is en weinig aandacht krijgt in de gebruikelijke lesmethoden. Wij hopen collega's met ons lesontwerp te stimuleren en ondersteunen om ook eens wat van het boek af te wijken en leerlingen een dieper inzicht te verschaffen in de goniometrische functies.

Inleiding

In de onderbouw gebruiken havo- en vwo-leerlingen goniometrie in meetkundige vraagstukken. In de bovenbouw moet de stap gemaakt worden van het meetkundig gebruik naar het analytisch gebruik van goniometrie. Dit is voor leerlingen een grote en vaak moeilijke stap. Denk hierbij aan de introductie van concepten als de *eenheidscirkel* en *radiaal*. Wij hebben daarom een les gemaakt met als doel een uitbreiding van het begrip van de sinus, gebruikmakend van de eenheidscirkel.
Er wordt expliciet en stapsgewijs voortgebouwd op de definitie van de sinus in een rechthoekige driehoek. Als die basis eenmaal goed is gelegd, zal de stap naar de cosinusfunctie en naar radialen niet zo groot meer zijn.
We hebben in de voorbereiding van deze les wetenschappelijke literatuur geraadpleegd, maar er bleek niet veel geschreven te zijn over de didactiek van goniometrie. Presmeg (zie [3]) schreef dat het belangrijk is om verschillende verschijningsvormen van de sinus te laten zien, zoals de grafiek, de sinus in een driehoek en de sinus in de eenheidscirkel. Dat is ook één van onze uitgangspunten geweest bij het ontwerpen van deze les. Verder gaf Choi-Koh (zie [2]) aan dat het gebruik van de grafische rekenmachine een positief effect heeft op het ontdekken van de effecten van variabelen in de standaardfunctie $y = a\sin(b(x - c)) + d$. Toch laten wij de grafische rekenmachine niet toe in onze les, omdat wij slechts naar de eenvoudige sinusfunctie $y = \sin(x)$ kijken en willen dat leerlingen het verloop van deze functie juist zelf ontdekken.

Voorkennis en lesdoelen

Leerlingen zijn bekend met de sinus als meetkundig begrip. Ze weten dus hoe ze de sinus kunnen gebruiken om zijden en hoeken te berekenen in een rechthoekige driehoek. Daarnaast gaan we uit van ervaring met het werken met assenstelsels, kennis van het begrip *kwadrant* en de vaardigheid van het herkennen en tekenen van scherpe en rechte hoeken. Tot slot verwachten we dat leerlingen weten dat alle punten op een cirkel een gelijke afstand hebben tot het middelpunt (de straal).
Gegeven deze voorkennis hebben we een aantal lesdoelen opgesteld:

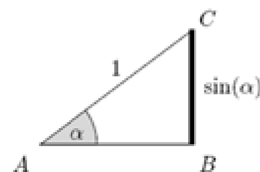
- Leerlingen weten dat de sinus niet alleen meetkundig, maar ook analytisch kan worden gebruikt: de sinus van een hoek in het eerste kwadrant is gelijk aan de y-coördinaat van het snijpunt van het tweede been van de hoek met de eenheidscirkel.
- Leerlingen weten dat in de overige kwadranten de sinus ook is gedefinieerd als de y-coördinaat van het snijpunt van het tweede been van de hoek met de eenheidscirkel.
- Leerlingen kunnen, gegeven een hoek, schatten hoe groot de bijbehorende sinus is.
- Leerlingen kunnen de grafiek schetsen van $\sin(\alpha)$ op het domein van 0° tot 360°.

Er wordt nog niets gedaan met de cosinus, radialen of standaardhoeken. We hebben ervoor gekozen om eerst grondig het concept van de eenheidscirkel en het verband met de sinus uit te leggen. Als dat goed begrepen wordt, volgen de andere concepten daar waarschijnlijk natuurlijk op. In onze ervaring bleek dat inderdaad ook zo te zijn.

Lesplanning

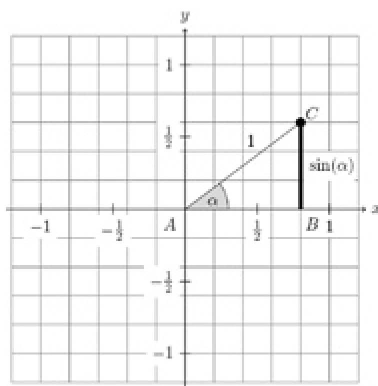
In de lesplanning wordt de uitleg in de les stap voor stap beschreven.

1. Teken een rechthoekige driehoek ABC en schrijf α in hoek A (***zie figuur 1***).



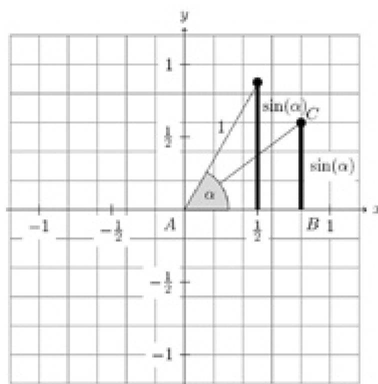
figuur 1

   Vraag de leerlingen wat ze weten van de sinus van α en begeleid de discussie naar $\sin(\alpha) = BC/AC$. Zet nu '1' naast AC, herleid de formule tot $\sin(\alpha) = BC$, en schrijf 'sin(α)' naast BC.
2. Teken een assenstelsel om de driehoek, waarbij punt A precies op de oorsprong ligt (***zie figuur 2***).
   Kies de schaal zodanig dat de lengte van AC in het assenstelsel precies 1 is. Leg uit waarom je een assenstelsel tekent, zodat je kunt praten over de coördinaten van de hoekpunten van de driehoek. Vertel dat specifiek de y-coördinaat van punt C van belang zal zijn, en heractiveer nog even de kennis over coördinaten door te vragen naar de y-coördinaat van punt B.



figuur 2

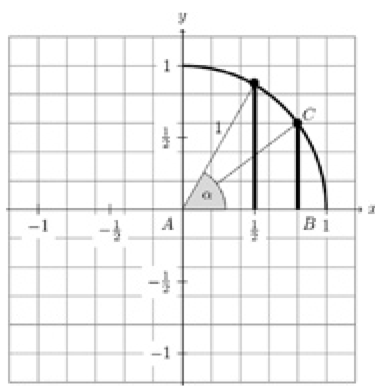
3. Merk op dat *BC* precies verticaal loopt vanwege de rechte hoek, en dat de lengte van *BC* daarom gelijk is aan het verschil van de *y*-coördinaten van punt *C* en punt *B*. Merk op dat hieruit volgt dat de lengte van *BC* gelijk is aan de *y*-coördinaat van punt *C*.
4. Teken een tweede rechthoekige driehoek *AB'C'*, met een andere hoek α (***zie figuur 3***).



figuur 3

Leg uit dat je punt *A* wederom op de oorsprong laat vallen om de hoeken goed met elkaar te kunnen vergelijken. Laat met de formule zien dat ook in deze driehoek geldt dat *B'C'* = sin(α), en schrijf weer 'sin(α)' naast *B'C'*. Merk op dat de schuine zijden van beide driehoeken even lang zijn, en dat punt *A* voor beide in de oorsprong ligt; hieruit volgt dat de punten *C* en *C'* op een cirkel met straal 1 en de oorsprong als middelpunt liggen.

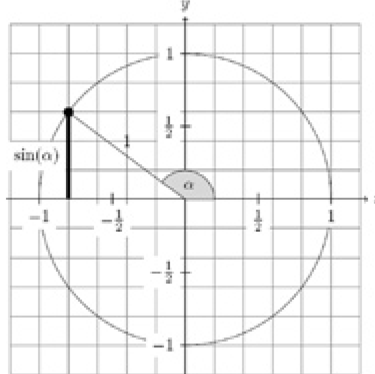
5. Teken de bijbehorende cirkelboog in het eerste kwadrant (***zie figuur 4***) en laat zien dat dit betekent dat de lengte van *B'C'* gelijk is aan de *y*-coördinaat van het snijpunt van het tweede been van de hoek met de cirkelboog. Leg uit dat, aangezien *B'C'* = sin(α), hieruit volgt dat sin(α) dus weer gelijk is aan deze *y*-coördinaat. Generaliseer tot slot door erop te wijzen dat dit resultaat geldt voor iedere hoek α in het eerste kwadrant.



figuur 4

Na deze klassikale uitleg laten we de leerlingen deze kennis in de praktijk brengen door een aantal oefenopgaven te maken van een werkblad [1]. De eerste twee opgaven toetsen of leerlingen de regel *y* = sin(α) begrepen hebben. Er wordt gevraagd naar de sinus-waarde behorende bij een hoek α en omgekeerd, en naar de minimale en maximale waarde van sin(α). Na het maken van deze opgaven wordt de klassikale uitleg hervat.

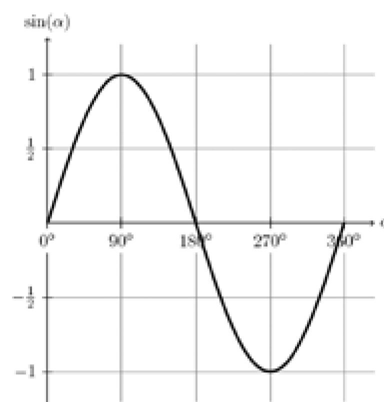
6. Leg uit dat je hoek α zelfs zo groot kunt kiezen dat het tweede been in het tweede kwadrant valt en teken ook zo'n hoek (***zie figuur 5***).



figuur 5

Vraag de leerlingen of je bij deze hoek op dezelfde manier als in het eerste kwadrant een driehoek kunt tekenen. Leg uit dat er geen rechthoekige driehoek met hoek α erin meer mogelijk is, en dat de afleiding voor het eerste kwadrant op basis van de meetkundige definitie van de sinus, zoals we die vanaf het begin hebben uitgevoerd, dus niet meer geldt in het tweede kwadrant.

7. Leg uit dat, om de sinus van alle hoeken te kunnen definiëren, in de wiskunde is afgesproken dat het resultaat dat voor het eerste kwadrant is afgeleid, ook geldt in de andere kwadranten: sin(α) is gelijk aan de *y*-coördinaat van het snijpunt van het tweede been van de hoek met de eenheidscirkel.
8. Teken de hele eenheidscirkel en het snijpunt van het tweede been in het tweede kwadrant met de eenheidscirkel. Markeer de *y*-coördinaat van dit snijpunt en merk op dat sin(α) dus gelijk is aan deze *y*-coördinaat.
9. Laat als afronding zien hoe de sinusgrafiek ontstaat uit de eenheidscirkel door deze te laten plotten met bijvoorbeeld VU Grafiek (***zie figuur 6***).



figuur 6

Na de tweede ronde klassikale uitleg werkt de klas weer aan de opgaven van het werkblad. De eerstvolgende opgave toetst of leerlingen hebben begrepen hoe de sinus van hoeken groter dan 90° is gedefinieerd. De leerling vult voor ieder kwadrant in wat de minimale en maximale waarde van de sinus is. Daarna volgt een opgave waarin deze punten in de grafiek van sin(α) aangemerkt moeten worden en de leerling gevraagd wordt om de grafiek door deze punten te tekenen. Tot slot wordt er gevraagd de sinus van enkele hoeken te schatten.

Resultaten

De les is in april 2010 gegeven aan een klas 4-havo met wiskunde B aan het Carmel College Salland te Raalte. Later hebben we de werkbladen van de leerlingen geanalyseerd, om te kijken of de lesdoelen behaald waren. De regel *y* = sin(α) was goed begrepen; de eerste paar opgaven, die dat toetsten, waren goed gemaakt. Uit de antwoorden op de tweede set opgaven bleek dat de meeste leerlingen het idee doorhadden, maar nog niet goed konden omgaan met de begrippen minimum en maximum. Veel leerlingen schreven op dat de sinus van hoeken in het tweede kwadrant minimaal 1 is en maximaal 0. Dit kan betekenen dat leerlingen dachten aan een minimale en maximale hoek, wat zou betekenen dat ze het beeld van een punt dat over de eenheidscirkel loopt goed voor ogen hadden. Bijna niemand was toegekomen aan de laatste paar opgaven over het schetsen van de grafiek en het schatten van

de sinus bij gegeven hoeken. Het is dus aan te raden het werkblad in te korten, of de verwerking te spreiden over twee lessen.

Conclusies

Het lesontwerp stelde ons in staat om de introductie van de sinus als analytisch begrip te baseren op het bestaande begrip bij de leerlingen van de sinus in een rechthoekige driehoek. Wij denken hiermee veel te hebben gedaan om deze overstap voor leerlingen gemakkelijker te maken. De antwoorden op de werkbladen geven aan dat de leerlingen de analytische definitie van de sinus grotendeels hebben begrepen. Ook hebben de leerlingen een beeld gekregen van de samenhang tussen de eenheidscirkel en de sinus.
We hopen dat deze lesstructuur (beginnende) docenten waardevolle richtlijnen geeft voor de uitbreiding van het sinusbegrip in de bovenbouwklassen van havo en vwo op basis van de bestaande voorkennis.

Noot

[1] Het werkblad is digitaal beschikbaar op: *http://fmt.cs.utwente.nl/~timmer/papers/euclides/werkblad.pdf*

Referenties

[2] S.S. Choi-Koh (2003): *Effect of a graphing calculator on a 10th-grade student's study of trigonometry*. In: *The Journal of Educational Research*, 96(6); pp. 359-369.

[3] N. Presmeg (2006): *A semiotic view of the role of imagery and inscriptions in mathematics teaching and learning*. In: J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, N. Stehlíková (eds.): *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 19-34.

Over de auteurs

Martin Alberink is docent wiskunde en natuurkunde aan het Assink Lyceum te Haaksbergen.
E-mailadres: *martin.alberink@gmail.com*
Heleen Muijlwijk is parttime docent wiskunde aan het Corderius College in Amersfoort. Daarnaast is ze nog bezig met het afronden van de opleiding tot eerstegraads docent.
E-mailadres: *h.muijlwijk@student.utwente.nl*
Mark Timmer is promovendus aan de Universiteit Twente op het gebied van theoretische informatica. In het kader van een project 'promovendi voor de klas' volgt hij naast zijn werk de opleiding tot eerstegraads docent wiskunde.
E-mailadres: *timmer@cs.utwente.nl*

Aankondiging / Wiskundetoernooi 2011



Het twintigste Wiskundetoernooi van de Radboud Universiteit Nijmegen, bedoeld voor de bovenbouw van het vwo, vindt in 2011 plaats op **vrijdag 23 september**.
Het thema zal zijn: cryptografie.
Het toernooi zal ook dit jaar gelijktijdig in Nijmegen, Keulen en Leuven worden gehouden.
Voor inschrijving en nadere informatie zie: *www.ru.nl/wiskundetoernooi*
Het contactadres voor e-mail is: *toernooicie@math.ru.nl*

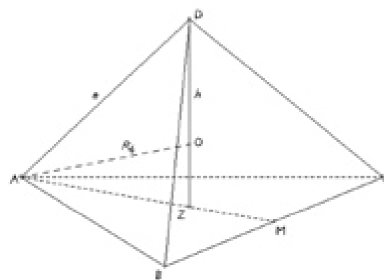
De inhouden van regelmatige veelvlakken

HUN OMGESCHREVEN BOL EN HUN IQ

[Kees Jonkers]

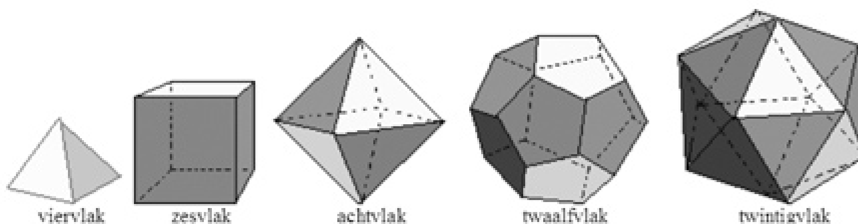
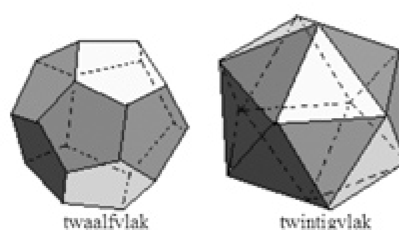
Inleiding

Een regelmatig veelvlak is een ruimtelijk lichaam dat begrensd wordt door congruente regelmatige veelhoeken. In ieder hoekpunt moeten even veel veelhoeken samenkomen. Er blijken *vijf* regelmatige veelvlakken te bestaan. Deze veelvlakken worden ook wel *platonische lichamen* genoemd. In de Griekse oudheid speelden ze – ook buiten de wiskunde – een belangrijke rol. De bekendste is het regelmatig zesvlak (de kubus). Deze wordt begrensd door zes vierkanten.
Het regelmatig vier- en achtvlak wordt door gelijkzijdige driehoeken begrensd. Dit geldt ook voor het regelmatige twintigvlak. Maar het twaalfvlak heeft de bijzonderheid dat het begrensd wordt door regelmatige vijfhoeken.



figuur 2

In figuur 2 is het regelmatige viervlak $D.ABC$ geschetst. M is het midden van BC en Z het zwaartepunt van driehoek ABC.
Er geldt:
$AZ = \tfrac{2}{3} \cdot AM = \tfrac{2}{3} \cdot (\tfrac{1}{2}a\sqrt{3}) = \tfrac{1}{3}a\sqrt{3}$
In driehoek AZD is volgens de stelling van Pythagoras:
$h^2 = AD^2 - AZ^2 = a^2 - (\tfrac{1}{3}a\sqrt{3})^2 = \tfrac{2}{3}a^2$

figuur 1

We zullen van elk regelmatig veelvlak de inhoud V_n uitdrukken in de lengte a van de zijde van het n-vlak. Ook zal de straal R_n van de omgeschreven bol van het n-vlak in a worden uitgedrukt.

Het viervlak

We gebruiken de formule voor de inhoud V van een piramide: $V = \tfrac{1}{3}Gh$.
Hierin is G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte van de piramide. Van een regelmatig viervlak is het grondvlak een gelijkzijdige driehoek met zijde a.
Er geldt dus: $G = \tfrac{1}{2}a \cdot (\tfrac{1}{2}a\sqrt{3}) = \tfrac{1}{4}a^2\sqrt{3}$.

Dus: $h = \tfrac{1}{3}a\sqrt{6}$.
Conclusie:
$V_4 = \tfrac{1}{3}Gh = \tfrac{1}{3}\cdot(\tfrac{1}{4}a^2\sqrt{3})\cdot\tfrac{1}{3}a\sqrt{6} = \tfrac{1}{12}a^3\sqrt{2}$.
Het middelpunt O van de omgeschreven bol ligt vanwege de symmetrie op DZ. Er geldt:
$OZ = DZ - OD = h - R_4$
De lengte R_4 van de straal volgt uit: $AO^2 = (R_4)^2 = AZ^2 + OZ^2$, of:
$R_4^2 = (\tfrac{1}{3}a\sqrt{3})^2 + (h - R_4)^2$
We vinden dus:
$R_4^2 = \tfrac{1}{3}a^2 + h^2 - 2hR_4 + R_4^2$

Zodat: $R_4 = \dfrac{\tfrac{1}{3}a^2 + h^2}{2h}$.
Met $h = \tfrac{1}{3}a\sqrt{3}$ is dan: $R_4 = \dfrac{a^2}{\tfrac{2}{3}a\sqrt{6}} = \tfrac{1}{4}a\sqrt{6}$.

Zesvlak en achtvlak

Voor het zesvlak (de kubus) geldt natuurlijk: $V_6 = a^3$.
Aangezien het middelpunt van de omgeschreven bol van een kubus samenvalt met het snijpunt van de lichaamsdiagonalen, zien we ook: $R_6 = \tfrac{1}{2}a\sqrt{3}$.

Ook het achtvlak levert weinig moeilijkheden op. Het bestaat uit twee op elkaar geplaatste identieke vierzijdige piramides. De hoogte h van zo'n piramide vinden we door de stelling van Pythagoras toe te passen.
$h^2 = a^2 - (\tfrac{1}{2}a\sqrt{2})^2 = \tfrac{1}{2}a^2$
Dus: $h = \tfrac{1}{2}a\sqrt{2}$.
De inhoud P van één van die piramides is dus:
$P = \tfrac{1}{3}Gh = \tfrac{1}{3}a^2 \cdot (\tfrac{1}{2}a\sqrt{2}) = \tfrac{1}{6}a^3\sqrt{2}$
Conclusie: $V_8 = \tfrac{1}{3}a^3\sqrt{2}$.
Het middelpunt van de omgeschreven bol van een achtvlak valt samen met het snijpunt van de diagonalen van het vierkant dat het symmetrievlak is.
Dus geldt voor de lengte van de straal: $R_8 = h = \tfrac{1}{2}a\sqrt{2}$.

Twaalfvlak en twintigvlak

De berekeningen voor het 12-vlak en het 20-vlak zijn te uitvoerig om hier weer te geven. Ze berusten op de eigenschappen van de vrij moeilijk te temmen regelmatige vijfhoek. Zonder afleiding geven we de formule voor de oppervlakte A van de regelmatige vijfhoek met zijde a:

$$A = \frac{a^2}{4}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$$

Zo ook de formules voor inhoud en straal van de omgeschreven bol:

- voor het twaalfvlak:
  $V_{12} = \dfrac{a^3}{4}(15 + 7\sqrt{5}),\ R_{12} = \dfrac{a}{4}(1 + \sqrt{5})\sqrt{3}$
- en voor het twintigvlak:
  $V_{20} = \dfrac{5a^3}{12}(3 + \sqrt{5}),\ R_{20} = \dfrac{a}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$

Hoe dicht benadert het regelmatige veelvlak zijn omgeschreven bol?

De regelmatige n-hoek benadert zijn omgeschreven cirkel steeds beter als $n \to \infty$. Dit geldt voor de oppervlakte en voor de omtrek.
Als er ook zoiets voor de veelvlakken zou gelden, dan zou het twintigvlak een betere benadering voor de omgeschreven bol moeten zijn dan bijvoorbeeld het twaalfvlak. Dit zou dan moeten gelden voor de oppervlakte en voor de inhoud. Om het vergelijken van oppervlakken mogelijk te maken berekenen we de verhouding van die grootheden. Die verhouding noemen we de *benaderingsgraad N*:

- voor de oppervlakte:
$$N_A = \frac{\text{oppervlakte van het veelvlak}}{\text{oppervlakte van de omgeschreven bol}};$$
- voor de inhoud:
$$N_V = \frac{\text{inhoud van het veelvlak}}{\text{inhoud van de omgeschreven bol}}.$$

Voor de oppervlakte A en de inhoud V van een bol met straal R geldt $A = 4\pi R^2$ en $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. De berekeningen van de benaderingsgraden zijn nu uit te voeren.
Voor het *twaalfvlak* vinden we gebruikmakend van bovenstaande resultaten:

$$N_A = \frac{12\cdot(\frac{1}{4}a^2)\cdot\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4\pi\cdot(\frac{1}{4}a(1+\sqrt{5})\sqrt{3})^2} \approx 0{,}8367 \text{ en}$$

$$N_V = \frac{\frac{a^3}{4}(15+7\sqrt{5})}{\frac{4}{3}\pi\cdot(\frac{1}{4}a(1+\sqrt{5})\sqrt{3})^3} \approx 0{,}6649$$

De berekeningen voor de andere regelmatige n-vlakken zullen we hier niet uitvoeren, maar de uitkomsten staan ***in tabel 1***.

n	N_A	N_V	
4	$\frac{2}{\pi\sqrt{3}} \approx 0{,}3676$	$\frac{2}{3\pi\sqrt{3}} \approx 0{,}1225$	
6	$\frac{2}{\pi} \approx 0{,}6366$	$\frac{2}{\pi\sqrt{3}} \approx 0{,}3676$	
8	$\frac{\sqrt{3}}{\pi} \approx 0{,}5513$	$\frac{1}{\pi} \approx 0{,}3183$	
12	$\approx 0{,}8367$	$\approx 0{,}6649$	←
20	$\approx 0{,}7619$	$\approx 0{,}6055$	

tabel 1

We zien uit deze tabel dat viervlak en achtvlak voor de benadering niet al te hoog scoren. Dit was wel te verwachten. Maar vergelijk het twaalfvlak met het twintigvlak! Het twintigvlak heeft een *kleinere* benaderingsgraad dan het twaalfvlak. Op het eerste gezicht een merkwaardig resultaat: met *twaalf* vlakken kun je een bol dus *beter* benaderen dan met *twintig* vlakken! Hoe kan het dat een regelmatig veelvlak met meer zijvlakken een slechtere benadering van de bol is dan een veelvlak met minder zijvlakken?
Blijkbaar is het *aantal* zijvlakken niet de enige bepalende factor. Ook de *grootte van de oppervlakte* is van belang! Er is een belangrijk verschil: De twaalf vlakken zijn vijfhoeken en de twintig vlakken zijn driehoeken!
De oppervlakte van een zijvlak van het twaalfvlak is bijna 4 keer zo groot als die van het twintigvlak. Dat betekent dat het totale oppervlak bijna 4 × 12 / 20 = 2,4 maal zo groot is. Dit verklaart dat het twaalfvlak zijn omgeschreven bol beter benadert dan het twintigvlak.

Het IQ van platonische lichamen

Van een willekeurig ruimtelijk lichaam kun je onderzoeken hoeveel ruimte het inneemt in verhouding tot zijn oppervlakte. Als voorbeeld kiezen we de bol.
Nemen we een bol met inhoud V van 1000 cm^3, dan is uit $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ is de straal R ervan te vinden:

$$R = \sqrt[3]{\frac{3000}{4\pi}} \text{ cm}$$

De oppervlakte A volgt dan uit de formule $A = 4\pi R^2$:

$$A = 4\pi\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{3000}{4\pi}}\right)^2 \approx 484 \text{ cm}^2$$

Voor een kubus met inhoud 1000 cm^3 is zijn oppervlakte natuurlijk 6 × 100 = 600 cm^2.
Nemen we alle ruimtelichamen met een inhoud van 1000 cm^3 onder de loep dan blijkt het getal 484 de kleinst mogelijke uitkomst voor de oppervlakte te zijn. Er geldt namelijk:
Van alle ruimtelichamen met even grote inhoud heeft de bol het kleinste oppervlak.
Men kan deze bijzonderheid zien als een vorm van ‘volmaaktheid’ van de bol.
Om deze ‘eigenschap van volmaaktheid’ duidelijker te maken wordt gewerkt met het begrip *isoperimetrisch quotiënt* (IQ). Het is een getal dat aangeeft hoe je inhoud (V) en oppervlakte (A) met elkaar kunt vergelijken.
Het is wel noodzakelijk ervoor te zorgen dat er een ‘dimensieloze’ verhouding ontstaat. Daarom nemen we het kwadraat van V en de derde macht van A.
Ook voeren we een constante 36π in om ervoor te zorgen dat de uitkomst voor de bol de waarde 1 krijgt.
Er geldt voor een willekeurig lichaam:

$$IQ = \frac{36\pi V^2}{A^3}$$

Voor de bol vinden we dan inderdaad:

$$IQ = \frac{36\pi\cdot(\frac{4}{3}\pi R^3)^2}{(4\pi R^2)^3} = 1$$

Wegens bovengenoemde (volmaaktheids) eigenschap van de bol zal nu voor elk ander ruimtelichaam gelden $IQ < 1$.
Deze ongelijkheid wordt de *isoperimetrische ongelijkheid* genoemd.
Hoewel niemand afweet van het bestaan van hun intelligentie, gaan we nu het IQ van de vijf platonische lichamen berekenen.
We kiezen als voorbeeld van de berekeningen het regelmatige viervlak.
Met $V = \frac{1}{12}a^3\sqrt{2}$ en $A = 4\cdot\frac{1}{4}a^2\sqrt{3} = a^2\sqrt{3}$ krijgen we:

$$IQ_{\text{viervlak}} = \frac{36\pi V^2}{A^3} = \frac{36\pi\cdot\frac{1}{72}a^6}{3a^6\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \approx 0{,}3023$$

De resultaten van de berekeningen voor alle regelmatige n-vlakken staan ***in tabel 2***.

n	IQ
4	0,3023
6	0,5236
8	0,6046
12	0,7547
20	0,8288

tabel 2

Je kunt dus zeggen dat de platonische lichamen bij een toenemend aantal vlakken steeds ‘volmaakter’ worden. Het twaalfvlak neemt nu niet meer een uitzonderingspositie in.

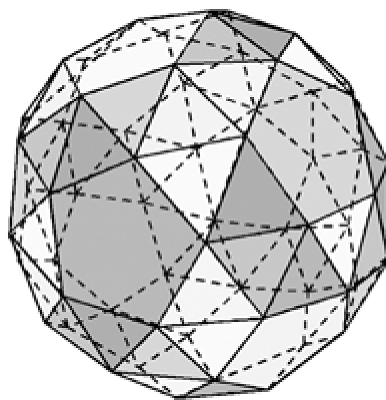
Lichamen met een hoog *IQ*

Je kunt je nog afvragen of er behalve de bol nog lichamen bestaan die een IQ hebben dat groter is dan die van het twintigvlak ($IQ \approx 0{,}8288$).
We geven twee voorbeelden van dergelijke lichamen.
Voor het *afgeknotte twintigvlak* blijkt $IQ \approx 0{,}9032$. Dit lichaam krijg je door het twintigvlak zodanig bij de hoekpunten af te knotten dat de ribben van het nieuwe lichaam even lang zijn. Het wordt een halfregelmatig veelvlak genoemd. Het heeft 90 ribben en 60 hoekpunten die keurig gelijk verdeeld op een bol liggen. Het wordt begrensd door 32 vlakken waarvan 20 regelmatige zeshoeken en 12 regelmatige vijfhoeken.
In een recent verschenen boek van Marcus du Sautoy [1] wordt vermeld dat de zestig atomen van het koolstofmolecuul C_{60} geplaatst zijn in de hoekpunten van een afgeknot twintigvlak.
Ook in de macroscopische wereld is dit afgeknotte twintigvlak overbekend. De in leer of plastic uitgevoerde voetbal laat het patroon van de 32 afwisselende vijf- en zeshoeken duidelijk zien (***zie figuur 3***).



figuur 3 Het vijf- en zeshoekige patroon op de voetbal wijst op een hoog IQ

Het tweede voorbeeld is de zogenoemde *stompe dodecaëder* (***zie figuur 4***). Het is een halfregelmatig veelvlak dat begrensd wordt door 80 gelijkzijdige driehoeken en 12 regelmatige vijfhoeken. Voor dit lichaam geldt $IQ \approx 0{,}947$. Vanwege het grote aantal vlakken is het natuurlijk niet geschikt om als model voor een voetbal, waarvan de straal 11 cm is, te dienen.
Er zouden voorbeelden kunnen zijn van veelvlakken met een IQ groter dan 0,947. De lezer wordt uitgenodigd mij hiervan op de hoogte te brengen.



figuur 4

Noot

[1] Marcus du Sautoy (2009): *Het symmetriemonster*. Amsterdam: Uitgeverij Nieuwezijds; p. 36 (ISBN 978-90-5712-286-6).
Dit boek werd vermeld in *Euclides* 84(7), p. 269.

Over de auteur

Kees Jonkers was van 1963 tot 1997 leraar aan het Petrus Canisius College te Alkmaar.
E-mailadres : *cbjjonkers@planet.nl*

Statistiek leren met een metronoom

[Carel van de Giessen]

Inlei ding

Statistiek wordt wel eens omschreven als de wetenschap waarin met data problemen worden opgelost. Het leren van statistiek begint met het kijken naar data in een context. Wat zijn er voor data, hoe kom je eraan, en hoe gedragen data zich?
In de curricula van het Nederlandse wiskundeonderwijs wordt tot nu de beschrijvende statistiek en de beoordelende statistiek vaak gescheiden behandeld: de beschrijvende statistiek vooral in de lagere jaren, de beoordelende statistiek in de bovenbouw, eigenlijk meer als een onderdeel van de kansrekening dan van de statistiek. Een benadering van statistiek met als vertrekpunt data kwam niet voor. Wel verklaarbaar eigenlijk. Wat moet je met een redelijke dataset op je ouderwetse schoolbord? Je beschikt niet over gereedschap om er zinvol mee aan de slag te gaan. Toen er wel ict-tools verschenen, veranderde er in feite niet zoveel.
Het nieuwe domein Statistiek en kans voor wiskunde A biedt de mogelijkheid om statistiek vanuit data te ontwikkelen door gebruik te maken van educatieve software.

In dit artikel wil ik laten zien hoe het leren van statistische concepten en het werken met statistiek kan gebeuren met data als vertrekpunt. Dit gebeurt in het experiment Statistiek en kans voor havo A. Ik baseer me onder meer op materiaal dat voor dit experiment is ontwikkeld en de daarmee opgedane ervaringen. De illustraties komen uit een bètaversie van VU-Statistiek (VU-Stat) dat bij het experimentele programma wordt gebruikt. Het papieren en digitale materiaal is te downloaden van de cTWO-site (*www.fi.uu.nl/ctwo/lesmateriaaldir/ExperimenteelLesmateriaal*).

Data en datasets

Data zijn de basale statistische gegevens, vastgelegd in getallen. Die getallen hebben een betekenis, want data maken deel uit van een context. Data op zich lijken soms heilig. Een momentane bloeddruk van 140 om 85 is 'mooi voor uw leeftijd', maar 150 om 95 wordt 'zorgelijk'. Deze getallen ontlenen hun waarde aan een veelheid van vergelijkbaar cijfermateriaal. De enkele gemeten waarde is in feite een representant van een interval van waarden die optreden met een bepaalde waarschijnlijkheid. Dat data nodig zijn voor het doen van uitspraken, lijkt een open deur, maar leerlingen moeten gaan beseffen wat het betekent dat statistische uitspraken gebaseerd zijn op data. Persoonlijke ervaringen en anekdotische data zijn geen goede bron voor data.
Statistische uitspraken kunnen vermoedens bevestigen, maar ook vooropgezette meningen en vooroordelen onderuit halen. De vraag is dan welke data je moet gebruiken, hoe je aan die data komt en hoe je die kunt gebruiken.
Een belangrijk statistisch concept is de variatie die data door toeval vertonen. Deze toevalsvariatie is de reden dat de resultaten bij het scoren van data van te voren niet precies of helemaal niet zijn te voorzien. Leerlingen moeten zich van die alomtegenwoordige variabiliteit bewust worden.
Een dataset met scores op één variabele is nauwelijks interessant. Je kunt wat dingen uitrekenen en plaatjes maken, maar dat zegt verder weinig; er zit te weinig verhaal in. Een dataset wordt pas interessant als er meerdere variabelen zijn, zowel kwantitatieve als kwalitatieve. Verschillende gegevens die een zekere relatie hebben, bijvoorbeeld gegevens van één persoon, worden bij elkaar een *statistische waarnemingseenheid*, korter *record* of *case* genoemd. Binnen zo'n dataset kun je deelgroepen maken en die met elkaar vergelijken. Uit ervaring blijkt dat werken met multivariate bestanden (bestanden met meerdere variabelen) voor leerlingen eerder een stimulans dan een probleem zijn.

De module Metronoom

Uit ervaringen en onderzoek in landen waar het werken met data onderdeel van het programma is, blijkt dat 'eigen' data een stimulans zijn bij het leren van statistiek. Data over een context die de leerlingen aanspreekt, maar liefst ook data die de leerlingen zelf gescoord hebben. Daarvoor is een softwaremodule ontwikkeld waarmee de leerlingen zelf data kunnen genereren. Data die 'eigen' zijn, waar statistiek mee geleerd kan worden en die voldoende flexibel zijn om ze op diverse niveaus te kunnen inzetten. In de module Metronoom in de bètaversie van VU-Stat is dat gerealiseerd. In het digitale materiaal voor het experiment Statistiek havo A is deze module opgenomen. Eerst een korte beschrijving, daarna aandacht voor de statistische concepten waarvoor deze module ingezet kan worden.

Het basisidee van de metronoom als generator van data is afkomstig van Dr. Wolfgang Riemer (Universiteit Keulen).
Een speler moet een bepaald metronoomtempo zo goed mogelijk vasthouden door de maat op de spatiebalk te tikken. ***In figuur 1*** (op pag. 258) staat het werkveld met diverse instelmogelijkheden die voor zichzelf spreken. Een bijzondere optie is de optie Muziek waarmee je een muziekbestand kunt afspelen en daarbij de maat slaan.
Het 'spel' verloopt als volgt.
De speler kiest een tempo, bijvoorbeeld Lento, neemt dat in zich op door te kijken of te luisteren naar de metronoom. Vervolgens gaat hij of zij de maat tikken op de spatiebalk. Na elke tik wordt de bpm-waarde (bpm = *beats per minute*), een geheel getal, berekend en als een dot (stip) weergegeven. Al spelende verschijnt er een dotplot van de scores. Na verloop van tijd is het spel afgelopen. De verticale lijn geeft het ingestelde tempo weer; ***zie figuur 2***.
Het spel kan vervolgd worden bijvoorbeeld door een andere speler of in een ander tempo. Daarmee ontstaat een dataset met meerdere variabelen. Tot slot kun je een overzicht met diverse representaties bekijken of de dataset opslaan om die later te analyseren. De dataset die je genereert, wordt automatisch geopend in de gebruikelijke datatabel zoals ***in figuur 3***. Daar kun je de dataset verder analyseren.
De doelvariabele is *bpm*, dus het aantal tikken per minuut van de speler. Daarnaast zie je nog enkele andere kenmerken/variabelen. Het *nummer* kun je als tijdsvariabele gebruiken. De variabele *speler* bevat

de ingevoerde namen, en de variabele *tempo,* de tempi die gespeeld zijn. Er zijn dus twee kwantitatieve en twee kwalitatieve variabelen in de dataset. Vooral de kwalitatieve variabelen zijn interessant om deelgroepen op te maken en zo verbanden te onderzoeken. Meerdere datasets kun je samenvoegen. Stel dat leerlingen thuis een aantal keren spelen en de gegevens opslaan. Je kunt dan een grote dataset maken waarin via de naam van de speler elke dataproducent valt te identificeren. Een mooie dataset als uitgangspunt voor het leren van statistiek.

Muziek, maat en statistiek

Bij het tikken van een metronoomtempo blijkt duidelijk of een speler een tempo kan 'vasthouden'. Iedereen maakt toevallige fouten maar maatvastheid is waar te nemen. Om muziek en statistiek te verbinden is het mogelijk een stuk muziek af te spelen en daarbij de maat of het ritme te tikken. De context voor de leerling wordt daardoor breder. Allerlei onderzoeksvragen die met muziek verband houden kunnen bedacht en onderzocht worden.
Bijvoorbeeld eenvoudige vragen over de betekenis van de ligging van het centrum van de dotplot, de betekenis van de breedte van de dotplot. Een aardige onderzoeksvraag is of leerlingen die een muziekinstrument bespelen, beter zullen scoren dan leerlingen die dat niet doen.
Interessant is dat sommige spelers tikken bij de eerste tel van de maat en anderen alle tellen van een maat registeren. Als je achter elkaar van hetzelfde stuk muziek afzonderlijk de maat en de eerste tel registreert, is uit de dotplot de maatsoort af te leiden. Als twee concentraties dots waarneembaar zijn – bijvoorbeeld bij 80 en 240 bpm – dan heeft het stuk waarschijnlijk een driekwartsmaat.
Een muzikale collega wilde weten hoe het zat met de spreiding van de data bij de eerste tel en de tweede tel van een maat. Uit een klein onderzoekje met de metronoom kwam naar voren dat de data van de tweede tel duidelijk meer spreiding vertoonden dan die van de eerste tel.

Statistiek met 'eigen' data

De mens – en zeker de moderne leerling – is sterk visueel ingesteld. Het ligt daarom voor de hand, voor het bekijken van een dataset die met de Metronoom is gemaakt, allereerst een dotplot te nemen. Als voorbeeld hier een dataset van Jaap en Leonard die beiden een *andante* probeerden te tikken. Een dotplot ervan (***zie figuur 4***) heeft didactische voordelen. Als je op een dot klikt (bij *bpm* = 70), wordt die vet en zie je linksboven de recordgegevens die bij het geselecteerde rondje passen. De afzonderlijke scores zijn herkenbaar, zo blijft de context duidelijk aanwezig. Van een uitschieter kan beoordeeld worden of die in het begin of later is gescoord en door wie. In een staafdiagram is de afzonderlijke score niet meer terug te vinden.
Het diagram is een goede basis voor statistisch redeneren. Indelingen in intervallen van gelijke breedte en in intervallen met gelijke aantallen zijn direct aan te wijzen, evenals de mediaan en kwartielafstand als maten voor ligging en spreiding. Dotplots zijn minder geschikt voor hele grote datasets met duizenden records. Honderden records is echter geen probleem. Je kunt overigens de grootte van een dot naar behoefte aanpassen.
De *bpm*-scores hebben een plaats op de horizontale as gevonden, alle verspreid tussen de 60 en 120. De concentratie in de buurt van 70-75 klopt wel met andante, maar de verdeling van de frequenties is bepaald niet symmetrisch te noemen. De variatie in de scores die bij het spelen al werd ervaren en niet te controleren viel, is hier uiteraard ook in beeld.
Het ingestelde andante (76 bpm) is hier aangegeven met behulp van een zogenoemde intervalschuif. Je ziet hoe vaak er een waarde boven en hoe vaak eronder is gescoord. Dat kan absoluut of relatief in procenten. Je kunt meerdere schuiven plaatsen en bewegen en daarmee de dataset in porties indelen.
In figuur 5 is eerst een schuif geplaatst die de dataset in twee (ongeveer) gelijke helften deelt. Vervolgens zijn die helften weer in ongeveer gelijke helften verdeeld. Met de zo ontstane kwartielen is de dataset al met vijf getallen samen te vatten: minimum, eerste kwartiel, mediaan, derde kwartiel, maximum. Dit heet ook wel het *vijf-getallen-resumé* van een dataset. Een visuele weergave van het vijf-getallen-resumé is de bekende boxplot.
In figuur 6 is de opeenhoping van 50% van de dots in de box te zien. De lengte van de box, de kwartielafstand, krijgt daardoor vrij natuurlijk een betekenis als maat voor de spreiding van de scores. De uitschieters die er zijn, hebben wel invloed op de spreidingsbreedte maar niet op de kwartielafstand.
De hier gebruikte dataset is het verzameld werk van twee personen, Jaap en Leonard. De vraag wie het beste maat weet te houden, ligt voor de hand. Om de prestaties te kunnen vergelijken moet je de dataset opsplitsen in deelgroepen, de dataset van Jaap en die van Leonard. Bovenstaande statistische verwerking van de data moet je dan twee keer doen, maar met de beschikbare technologie is dat zo gebeurd. Uit de verdelingen ***in figuur 7*** is direct duidelijk dat Jaap goed maat heeft weten te houden. Leonard doet het slecht, ook de uitschieters staan op zijn conto. Misschien werd hij afgeleid tijdens het spelen. Niet alleen zit Jaap op een goed andante ook de spreiding van zijn data is stukken beter dan die van Leonard. Beide dotplots laten geen symmetrisch beeld zien rond de ingestelde waarde van 76 bpm: de afwijkingen zijn links en rechts verschillend. Jaap heeft de neiging tot enig *ritenuto*. Ook in de kentallen zijn de verschillen goed te zien (***zie tabel 1***).

Speler	Jaap	Leonard
aantal waarnemingen	100	100
gemiddelde	68,0	84,6
mediaan	68	82
modus	70	75
minimum	60	67
maximum	78	117
eerste kwartiel	65	75
derde kwartiel	71	93
kwartielafstand	6	18

tabel 1 Kentallen

Andere manieren om de dataset te bekijken

De intervalschuif is hierboven gebruikt om de dataset in te delen in kwarten. Behalve een indeling in kwartielen kun je net zo eenvoudig ook andere indelingen in gelijke porties maken, bijvoorbeeld in decielen. Maar ook een klassenindeling in gelijke intervallen gaat prima met de schuiven (***zie figuur 8***). De volledige informatie is er nog. De stap naar het histogram is vooral gewenst bij een veel grotere dataset. Daardoor ontstaat een beter overzicht, anderzijds gaat er informatie verloren omdat de dots niet meer te identificeren zijn. Je wordt je daarmee zowel de kracht als de zwakte van het histogram opnieuw bewust.
De variabele *nummer* in de datatabel geeft de volgorde aan waar in het spel een bepaalde score is gemaakt. Je kunt deze variabele daarom goed als tijdsvariabele gebruiken. Een diagram met deze variabele geeft een heel ander beeld van het maatproces.
De tijdreeks ***van figuur 9*** komt uit een dataset waarbij na elkaar twee tempi zijn gespeeld. Uit deze grafiek kun je afleiden welke tempi dat waren. Duidelijk is dat de spreiding bij een hoog tempo duidelijk groter is dan bij een laag tempo. Ook valt op dat de speler de neiging heeft langzamer te gaan spelen.

Tot slot

De grondstof van statistiek zijn data in een context. Om zinvol met statistiek om te gaan moeten leerlingen het een en ander over data leren. Wat zijn data, hoe krijg je data, hoe kun je data in beeld brengen, steeds in het

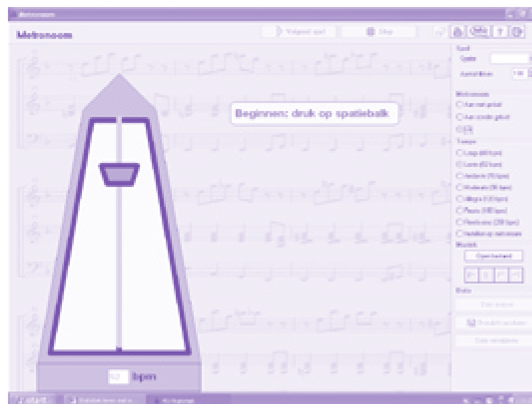
besef dat data aan een context gebonden zijn. Dankzij technologie is het mogelijk statistiek te laten beginnen bij de bron: data. Het blijkt dat werken met 'eigen' data de leerlingen stimuleert. Het verwerven van belangrijke statistische concepten, zoals verdeling en variabiliteit, gaat dan gemakkelijker.
De relatief onbekende dotplot is vooral voor beginners in de statistiek een krachtig didactisch middel. Naast de dotplot, waarmee veel statistische activiteiten mogelijk zijn, bestaat er een veelheid aan representaties (***zie figuur 10***). Als in een volgende leerfase de leerlingen data gaan analyseren, zullen ze een verantwoorde keus moeten maken. Daarvoor biedt VU-Stat de optie om meerdere representaties tegelijkertijd te beoordelen.

Bronnen

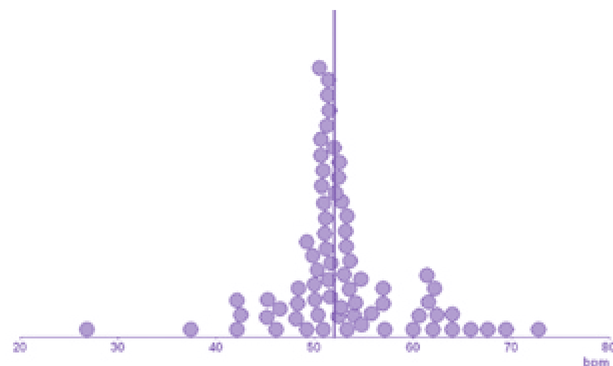
- B. Chance, D. Ben-Zvi, J. Garfield, E. Medina (2007): *The Role of Technology in Improving Student Learning of Statistics*. In: *Technology Innovations in Statistics Education,* volume 1, issue 1. Digitaal beschikbaar via: *http://escholarship.org/uc/item/8sd2t4rr.pdf*
- cTWO (2009): *Experimentele examenprogramma's 2014* (pdf, 20 februari 2009); via *www.ctwo.nl* | Algemeen | publicaties
- cTWO (2010): *Experimenteel lesmateriaal Havo A: papierboek en Digiboek*; via *www.ctwo.nl* | Wiskunde A | Lesmateriaal | materialenoverzicht Wiskunde A, B, C | HAVO Wiskunde A | DIGIBOEK3.exe
- J. Engel (2008): *Activity-based statistics, computer simulation and formal mathematics*. In: *Proceedings of 6th International Conference of Teaching Statistics* (INCOTS6).
- GAISE (2005) - *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education*
- C. Konold, C. van de Giessen (2008): *Data analyse met behulp van educatieve software*. In: *Euclides* 84(4); pp. 208-212.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000, 2008): *The role of technology in the teaching and learning of mathematics.Principles and standards for school mathematics*. Reston (VA, USA): NCTM.

Over de auteur

Carel van de Giessen was wiskundedocent en auteur van schoolboeken. Hij is lid van cTWO en houdt zich in het bijzonder bezig met het nieuwe leerplan Statistiek en kans.
E-mailadres: *carelvdg@planet.nl*



figuur 1 Het werkveld van de Metronoom



figuur 2 Dotplot van scores op de variabele bpm

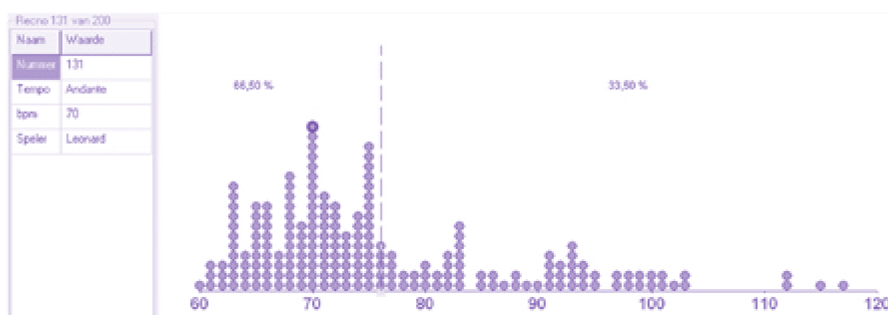
Data analyse | Bestand metronoom_set3.VUS

Bestand Data Beeld Grafiek Tabel Kentallen Meer statistiek Opties ?

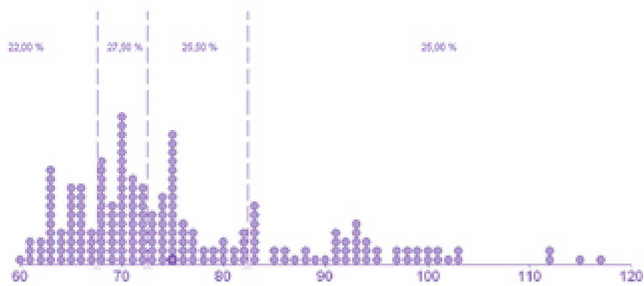
Labels

Nr	Nummer	Tempo	bpm	Spieler
1	1	Andante	75	Jaap
2	2	Andante	76	Jaap
3	3	Andante	75	Jaap
4	4	Andante	71	Jaap
5	5	Andante	78	Jaap
6	6	Andante	77	Leonard
7	7	Andante	75	Leonard
8	8	Andante	74	Leonard
9	9	Andante	74	Leonard
10	10	Andante	75	Leonard

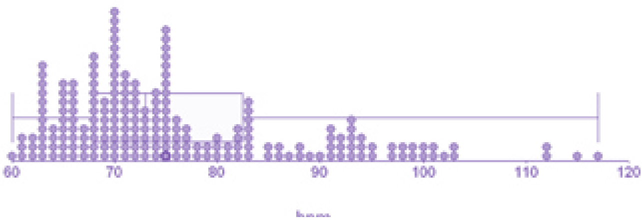
figuur 3 Een gedeelte van de datatabel gescoord met de Metronoom



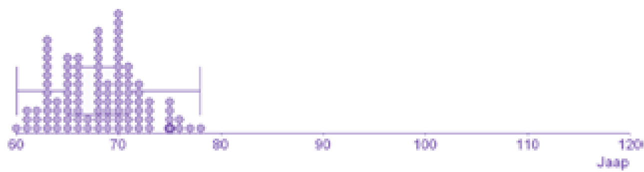
figuur 4 Dotplot, recordinformatie en schuif



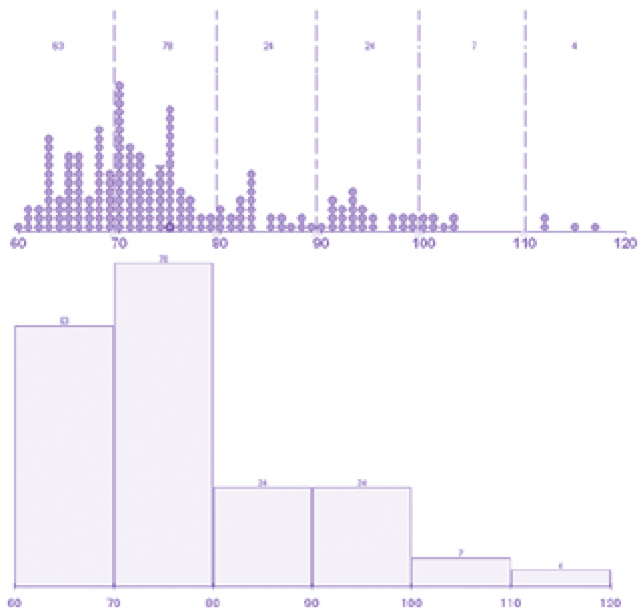
figuur 5 Indeling dataset in vier ongeveer gelijke porties



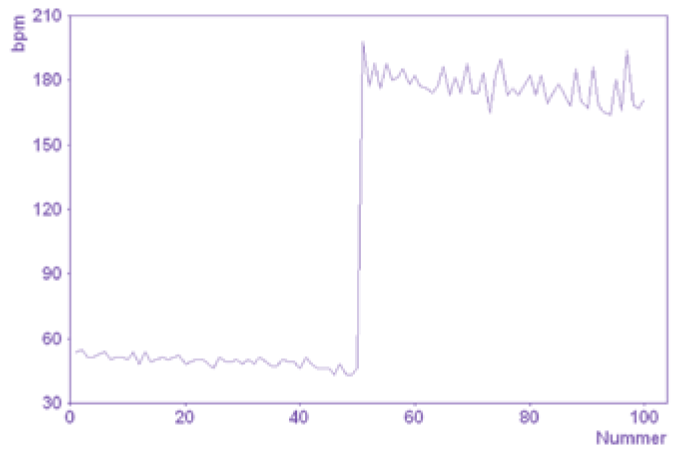
figuur 6 Dotplot en boxplot



figuur 7 Twee deelgroepen, met boxplot



figuur 8 Dotplot en histogram



figuur 9 Tijdreeks



figuur 10 Overzicht van verschillende representaties

Promotieonderzoek en leraarschap combineren

DUDOC'ERS

[Brechje Hollaardt en Bert Zwaneveld]

Sinds een paar jaar is een aantal leraren (m/v) naast hun leraarsbaan bezig met een promotieonderzoek. Enkelen doen dit in het kader van de vernieuwingen bij de vakken wiskunde, natuurkunde, scheikunde, biologie en NLT. Dat kader heet het DUDOC-programma, onderdeel van het Platform Bèta Techniek. Voor wiskunde gaat het om de vernieuwingen zoals door cTWO in gang gezet.
Op woensdag 2 maart spreken we een uur in een rondetafelgesprek met zeven promovendi die met een wiskundig onderwerp bezig zijn (geweest), van wie er vijf participeren in DUDOC. Wij zijn vooral geïnteresseerd in hoe zij de combinatie van het doen van onderzoek en hun baan als wiskundeleraar ervaren. Over de deelnemers en hun onderzoek staat een en ander in de kaders. Wat de organisatie betreft: de 'DUDOC-onderzoekers' zijn voor 0,6 fte voor hun onderzoek vrijgesteld van hun lestaak. Het onderzoek moet in principe in vier jaar worden afgerond. Een paar keer per jaar hebben ze gezamenlijke dagen voor scholing en discussie over de voortgang en dergelijke. Vandaag was zo'n gezamenlijke dag. Het gesprek vindt plaats tijdens de middagpauze. Ook Tjeerd Plomp, emeritus-hoogleraar onderwijskunde die vanuit DUDOC de gezamenlijke dagen mede begeleidt, is bij het gesprek aanwezig.
Achtereenvolgens komen de volgende thema's aan de orde: onderzoek en de eigen professionele ontwikkeling, de relatie met de vernieuwingen van cTWO, onderzoek combineren met school, onderzoek en je privé-leven en de rol van het DUDOC-programma dat als kader voor de verschillende onderzoeken fungeert.



foto 1 Enkele deelnemers rond rechthoekige tafels

Christian Bokhove – Ik probeer in mijn onderzoek ict en algebra te integreren, zowel de vaardigheden, als inzicht. Mijn onderzoek brengt een goede balans in vaardigheden en begrip, geeft inzicht in welke eigenschappen een digitale tool voor algebra het beste kan hebben, en geeft aanbevelingen hoe de digitale tool goed in te zetten is.

Joke Zwarteveen – Ik doe een onderzoek naar het begrijpen van het concept differentiaalvergelijkingen. De nadruk ligt op het (zonder ict) modelleren tot een differentiaalvergelijking. cTWO vindt het belangrijk dat de leerlingen leren een differentiaalvergelijking te analyseren. Het zelf opstellen van een differentiaalvergelijking lijkt daarvoor een voorwaarde te zijn. Met mijn onderzoek hoop ik dit ook aan te tonen. Ik hoop dat de vernieuwingscommissie deze uitkomst serieus neemt, zodat het opstellen van differentiaalvergelijkingen in zeer verscheiden situaties in het curriculum zal worden opgenomen. De deelnemende docenten aan mijn onderzoek vonden vanuit wiskundig en didactisch oogpunt (voorbereiding op technisch vervolgonderwijs) het aanleren van het opstellen van een differentiaalvergelijking aan leerlingen, een verrijking.

Adri Dierdorp – Mijn onderzoek beslaat het ontwerpen van lesmateriaal dat gebruikt wordt bij NLT. In dit materiaal is statistiek de link tussen wiskunde en de natuurwetenschappen. Leerlingen krijgen een redelijk beeld van hoe wiskunde in de praktijk gebruikt wordt en meer inzicht in de wiskundige achtergrond van statistiek.

Sonhia Palha – In de huidige onderwijspraktijk van de bovenbouw ligt de nadruk op procedurele vaardigheden en wordt er te weinig aandacht besteed aan het ontwikkelen van conceptueel begrip. In mijn onderzoek ontwerp ik opdrachten die, als aanvulling op de gebruikte wiskundemethode, leerlingen in groepjes aan het denken zetten. In zes scholen worden de ervaringen met deze opdrachten gevolgd en geanalyseerd. Leerlingen blijken met geschikte opdrachten in staat om wiskundig te redeneren en de betrokken docenten krijgen naar eigen zeggen meer inzicht in het denken van hun leerlingen.

Anneke Verschut – Mijn onderzoek ging over de rol van de docent bij het bevorderen van samenhangende statistiekkennis bij havo-leerlingen. De door cTWO voorgestelde nieuwe opzet van het domein statistiek binnen havo wiskunde A beoogt onder andere dat leerlingen meer overzicht hebben over de basisconcepten die in de statistische onderzoekscyclus een rol spelen en dat ze kunnen beoordelen in welke situatie ze welk statistisch gereedschap moeten inzetten. Docenten zullen in hun lessen activiteiten moeten aanbieden die de vorming van dit soort kennis bevorderen. De beoogde uitkomsten van mijn onderzoek waren onder andere materialen die de docenten hierbij kunnen ondersteunen.

Theo van den Bogaart – Ik ben van 2002-2006 aio [assistent in opleiding, promovendus; red.] geweest, ben toen voor de klas gaan staan en heb tegelijkertijd mijn onderzoek afgerond. Ik ben niet gepromoveerd op een didactisch, maar op een vakinhoudelijk onderwerp (algebraïsche meetkunde). Dat ik door de redactie van *Euclides* ben uitgenodigd voor dit rondetafelgesprek heeft ook te maken met mijn cTWO-achtergrond.

Daan van Smaalen – Het doel van mijn onderzoek is het verkrijgen van inzicht in het leren van docenten in een *lesson study* team. *Lesson study* is een aanpak waarbij docenten in een team een zogenoemde onderzoeksles ontwerpen, die wordt uitgevoerd in het bijzijn van alle teamleden. Na afloop wordt de les nabesproken, bijgesteld en opnieuw in een klassensituatie uitgetest. Bij *lesson study* draait het niet om het ontwerpen van een perfecte les, maar om het doen van onderzoek in je eigen lespraktijk naar het leren van leerlingen.

Onderzoek en de eigen professionele ontwikkeling

De eerste vraag die we bespreken, is in hoeverre het doen van onderzoek bijdraagt aan de eigen professionele ontwikkeling als wiskundeleraar. Adri bijt de spits af en geeft aan dat hij van een tamelijk intuïtief opererende wiskundeleraar die relatief onbewust keuzes maakte, een veel bewuster opererende wiskundeleraar is geworden. Het doen van onderzoek en dan met name het lezen van literatuur en het uitproberen van ontwikkelde materialen, is hiervoor verantwoordelijk. Christian vult aan: ‘Door zelf onderzoek te doen ben ik de waarde van allerlei theorie voor de lespraktijk gaan zien. Het beeld dat ik had, was dat onderzoek te theoretisch was en de leraar te praktisch – vooral voor de korte termijn aan het werk, ook vanwege tijdsdruk. Ik ervaar nu dat onderzoek de brug biedt tussen de theorie en de praktijk.’ Anneke onderschrijft dit: zij heeft een bredere kijk op het onderwijs gekregen doordat theorie en praktijk nauwer op elkaar betrokken worden. Adri komt hier later in het gesprek nog even op terug. Hij had wel verwacht dat het doen van onderzoek het verband tussen theorie en praktijk zou versterken. Maar dat het zo sterk zou zijn, had hij nu ook weer niet verwacht.
Sonhia benadrukt een ander aspect. Voor haar is het belangrijkste dat ze veel meer aandacht voor en inzicht in het denken van de individuele leerling heeft gekregen. Bij klassikaal lesgeven blijft dat veel te veel onderbelicht. Door haar onderzoek, en dan met name het bestuderen van de literatuur over hoe leerlingen abstracte of formele begrippen construeren, heeft ze dieper inzicht gekregen in dat denken van de leerling. Daan, die geen DUDOC-onderzoeker is en niet meer voor de klas staat maar wel veel met leraren werkt, is het met Sonhia eens. Maar hij gaat verder en betrekt er ook het pedagogische, misschien is hier ‘menselijke’ een betere term, aspect bij. Bij het leren oplossen van problemen, niet onbelangrijk bij wiskunde, speelt dat aspect misschien een nog wel belangrijker rol dan het vakdidactische.
Joke gaat in op de kwaliteit van de wiskundeleraar. Ze heeft geleerd bewuster op haar didactisch handelen te reflecteren. Dat heeft er volgens haar niet toe geleid dat ze anders is gaan handelen. Wel werkt ze veel minder op de automatische piloot. Het lezen van literatuur in het kader van haar onderzoek heeft daar een belangrijke rol in gespeeld.
Anneke, die inmiddels gestopt is met haar onderzoek, noemt een nadeel van de combinatie onderzoeker-leraar. Doordat ze minder aanwezig is op school en minder lessen geeft, is ze niet alleen minder aanwezig voor haar leerlingen, maar ook minder bezig met de inhoud. Joke herkent dit: voor haar is met name de zo belangrijke pedagogische kant van het leraarschap onder druk gekomen. Een ander nadeel van de combinatie onderzoek-leraar is dat de dagelijkse hectiek op school met korte termijn deadlines, onverminderd doorgaat. Ook al ben je veel minder op school, je ontkomt niet aan bijvoorbeeld proefwerken die op een bepaalde datum gegeven en nagekeken moeten worden.
We ronden dit deel van het gesprek af en stappen over op de relatie met de vernieuwingen van cTWO.

Relatie met de vernieuwingen van cTWO

Bij Joke, differentiaalvergelijkingen, en Anneke, statistiek, is er een inhoudelijke verbinding met de vernieuwde programma’s. Anneke heeft materiaal ontwikkeld en uitgeprobeerd, dat wil zeggen samen met leraren op andere scholen; haar eigen school doet niet mee met de pilots van cTWO. Wat haar betreft heeft de relatie met cTWO niet zo goed uitgepakt omdat de achterliggende visie van cTWO niet voor iedereen, met name de pilotdocenten, voldoende duidelijk was. Christian merkt op dat in het visiedocument van cTWO, *Rijk aan betekenis*, het een en ander over het gebruik van ict staat, maar veel meer over algebra en algebraïsche vaardigheden. Zijn onderzoek richt zich vooral op de relatie tussen die twee. Daarbij heeft hij stellig de indruk dat we eigenlijk nog maar aan het begin staan van de uitvoering van de visie van cTWO.
De tweede niet-DUDOC’er in het gesprek, Theo, lid van het projectteam van cTWO, bevestigt dat in het algemeen de implementatie van de ideeën van cTWO onduidelijk is. Sonhia stelt dat haar onderzoek, begonnen met het doel een bijdrage te leveren aan de niveauverhoging van leerlingen op wiskundig gebied, waarvoor cTWO pleit, zich meer in algemene zin ontwikkelt: wat is de waarde van interactie tussen leerlingen en tussen leerlingen en leraar voor de ontwikkeling van hun wiskundig denken?
De voorzichtige conclusie is dat bij een paar onderzoeken de relatie met de vernieuwingen losser aan het worden is. De onderzoekers geven aan dat dit kan samenhangen met het feit dat een onderzoek nu eenmaal op een gegeven moment zijn eigen dynamiek krijgt.

Onderzoek combineren met school

Hier begint Sonhia: ‘Doordat je niet steeds op school bent, mis je dingen.’ Ze werkt nu aan een artikel en dat vergt veel tijd en concentratie, waardoor ze de school er eigenlijk ‘niet goed bij kan hebben’. Door haar ervaring als leraar kan ze de noodzakelijke schoolzaken wel snel en efficiënt regelen. ‘Het schrijven van een artikel vind ik trouwens een behoorlijk lastige klus. Ik ben er heel geconcentreerd mee bezig. Ik merk dat ik als onderzoeker als het ware een tweede identiteit ontwikkel, naast die van leraar. Het grootste verschil tussen die twee identiteiten is misschien wel dat je bij onderzoek van veel meer mensen afhankelijk bent dan bij je onderwijs, waar je alles in eigen hand hebt.’ Anneke vult aan dat er een andere, afstandelijkere relatie met je collega’s ontstaat, wat Joke bevestigt. Voor Christian, die ook die afstand tot zijn collega’s ervaart, hoort dit er nu eenmaal bij: je hebt voor je onderzoek gekozen, maar je moet je collega’s er wel regelmatig aan helpen herinneren dat er nu minder een beroep op je gedaan kan worden: kiezen = verliezen!

Theo verwoordt iets dat door velen herkend wordt: de combinatie onderzoeker-leraar is een lastige als je op school bent, want school gaat dan altijd voor. En als je eenmaal een tijdje je school hebt laten voorgaan – wat soms gewoon moet – is het lastig en tijdrovend om weer goed in je onderzoek te komen.

Onderzoek en je privé-leven

Joke vertelt wat ook anderen met kinderen soms als moeilijk ervaren: je moet regelmatig ‘nee’ tegen ze zeggen, want het onderzoek gaat voor. Anneke met kinderen van 10, 12 en 13 jaar werkte daarom maar drie dagen. Ze merkte dat haar kinderen haar gingen ontzien; dat vond ze best confronterend. Als de kinderen nog jong zijn, valt het overigens wel mee; dan heb je lange avonden tot je beschikking. Sonhia vult aan dat veel werken in het weekend en tijdens vakanties privé wel eens tot spanningen kan leiden.

Maar er staan ook positieve dingen tegenover. Anneke meldt dat haar leerlingen het best wel stoer vinden dat hun lerares een promotieonderzoek deed. En Sonhia noemt het feit dat ze door haar onderzoek met name internationale contacten heeft opgedaan, leidend tot een heel nieuw netwerk van professionals. Christian bevestigt dit. Hij noemt zichzelf een piekwerker die intuïtief met de genoemde spanningen omgaat. Joke heeft ten aanzien van haar privé-achterban wel een beetje een schuldgevoel. Anneke had dat in het begin zeker niet, maar dat is wel in de loop der tijd gekomen; dit was een van de redenen om uiteindelijk met haar onderzoek te stoppen.

De meeste DUDOC-onderzoekers voelen een spanning ten aanzien van het tijdpad: het onderzoek moet in principe in vier jaar worden afgerond. Dan mengt Tjeerd Plomp zich in het gesprek: ‘Wat zou je een collega aanraden, die een promotietraject in combinatie met lesgeven overweegt?’ Iedereen zegt dat dit sterk van die collega afhangt. Christian: ‘Als je inschat dat de collega het kan en wil, dan zou ik het zeker aanraden.’ Anneke zou wijzen op de dubbele wereld waarin je terecht komt. Ze noemt ook praktische punten als de afstand tot de universiteit waar je je onderzoek doet en de eigen woonplaats. Joke zou met de collega de plussen en minnen, ook de praktische, op een rij zetten. Adri bepleit een positieve benadering, want het is niet alleen een grote verrijking voor je eigen onderwijs, maar ook voor de school als er leraren promoveren op een vakdidactisch onderwerp. Ook een bescheidener doel dan een promotie is volgens Adri al goed, bijvoorbeeld een onderzoek in je eigen klas bij een bepaald vakdidactisch probleem. ‘Eigenlijk zou iedereen dat met enige regelmaat moeten doen. Er zou een beleid moeten zijn dat iedere leraar – zeg eens in de tien jaar – een jaar lang een dagdeel hiervoor krijgt.’ Joke ziet dan liever een constructie van eens in de vijf jaar een hele dag, anders blijft het te marginaal. Anneke is het daar niet mee eens: ‘Sommige collega’s hebben andere kwaliteiten dan het doen van onderzoek.’ Sonhia denkt dat als je eenmaal met onderzoek bezig bent, het een deel van jezelf wordt en dat je er dan nooit meer mee kunt stoppen. Theo noemt ter afsluiting van dit onderdeel de misschien wel belangrijkste voorwaarde die lang niet voor elke leraar zal opgaan: hart hebben voor onderzoek.

De rol van het programma

Ter afsluiting gaan we in op de vraag van Tjeerd Plomp naar de rol van het DUDOC-programma waarbinnen de onderzoekers werken. Sonhia, Theo en Adri vinden het allerbelangrijkste dat er een groep is die voor begeleiding, scholing, bewaking van de voortgang én blikverruiming zorgt. Daan voegt hieraan toe dat die mensen oog moeten hebben voor de persoon van de individuele leraar-onderzoeker en wat hem of haar beweegt. De motivatie voor het onderzoek is natuurlijk voor het grootste deel je eigen lespraktijk: wat werkt daar wel/niet en waarom is dat zo? Sonhia spitst de rol van die begeleider(s) nog wat toe: je hebt mensen op universitair niveau nodig die je een kritische spiegel kunnen voorhouden. Maar Daan vindt dat je ook collega’s, leraren en medeonderzoekers nodig hebt die de kritische spiegelfunctie kunnen vervullen. Sonhia wil hier wel onderscheid maken tussen een promotieonderzoek waarvoor je universitaire begeleiders nodig hebt, en kleinere onderzoeken in je eigen klassen bij bepaalde didactische problemen, waar je met collega’s kunt volstaan.

Dan blijkt dat we al ruim een uur bezig zijn en moeten we stoppen.

Slot

Onze conclusies zijn: de combinatie leraar-onderzoeker is een lastige, als het om de relatie tot je school, je collega’s en je privéleven gaat, maar een verrijking voor je eigen professionele ontwikkeling. Met name je kennis van de theorie verrijkt je functioneren als leraar in de praktijk: je gaat bewuster professioneel handelen. Belangrijk is dat er vanuit het programma voor goede begeleiding gezorgd wordt.

Noot van de redactie

Zie ook de artikelen *ICT als tool voor algebra* (Brechje Hollaardt; in: *Euclides* 86(5); pp. 184-185) en *Digitaal werken aan algebraïsche vaardigheid en inzicht* (Christian Bokhove; in: *Euclides* 86(5); pp. 186-188).

Over de auteurs

Brechje Hollaardt is zelfstandig communicatieadviseur voor onder andere implementaties van onderwijsvernieuwingen in de bètavakken.
E-mailadres: *brechje@hypertekst.nl*
Bert Zwaneveld is emeritus-hoogleraar op het gebied van de professionalisering van de leraar, in het bijzonder in het wiskundeonderwijs en informaticaonderwijs.
E-mailadres: *Bert.Zwaneveld@ou.nl*

Kwadraten uit het hoofd geleerd en nog leuk ook

[Frans Ballering]

Omdat ik – ondanks mijn pensionering als vakdidacticus – nog steeds niet ben uitgedacht over het leren van wiskunde door kinderen, blijf ik schrijven. Voor mijn stukjes ben ik geïnspireerd door het grote enthousiasme van wiskundeleraren die het kunnen opbrengen om 's avonds ook nog lessen vakdidactiek bij te wonen.

Ik vond tussen mijn papieren onderstaand verslagje geschreven door een student van de lerarenopleiding. Hij of zij schreef het al weer heel wat jaren geleden. Ik heb er geen naam meer bij. Ik hoop dat een lezer het herkent en reageert.

$3^2 = 6$

Met enige regelmaat merkte ik dat de leerlingen geen sterk beeld hadden van kwadraten. Vanaf 2^2 bleven ze met 2 vermenigvuldigen, dus $3^2 = 6$ en $4^2 = 8$, of ze gingen vanaf 4 alles met 4 vermenigvuldigen. Ik heb van dit laatste nog geprobeerd na te gaan of dit kwam door het woord 'vierkants-getallen' maar dat is volgens mij de reden niet: leerlingen die deze fout maakten bleken lang niet allemaal het woord vierkants-getallen te kennen.
Voor ik aan het hoofdstuk kwadratische verbanden begon, heb ik daarom de kwadraten geautomatiseerd. Allereerst ben ik natuurlijk wel begonnen met het begrip: een getal met zichzelf vermenigvuldigd, maar ik realiseer me terdege dat bij het gros van de leerlingen, namelijk degenen die er problemen mee hadden, dit begrip niet blijft hangen, maar hopelijk het geautomatiseerde antwoord wel.

Kaartjes

Ik liet allereerst de leerlingen de kwadraten van 1 tot en met 15 achter in het schrift schrijven. Zelf had ik op kleine kartonnen kaartjes geschreven: 0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, enzovoort. Van de biologielerares had ik een stopwatch geleend en op haar advies (zij kon bewonderenswaardig goed met vmbo-leerlingen overweg) had ik voor prijsjes gezorgd: dropsleutels.

Spelen

Ik wees een leerling aan en liet hem zelf een partner kiezen. De eerste leerlingen wisten nog niet wat er ging gebeuren, maar ik nam aan dat voordoen beter zou werken dan uitleg. Een van de leerlingen kreeg de set geschudde kaartjes, de ander moest zo snel mogelijk antwoord geven. De leerling met de kaartjes zei dus: 'Zes kwadraat', 'Tien kwadraat', 'Eén kwadraat', enzovoort. Niet alleen 'zes', 'tien', 'een': ze moesten het woord 'kwadraat' erbij gebruiken. Dat leerlingen het soms formuleerden als 'het kwadraat van 6', 'het kwadraat van 10', vond ik ook goed. Zodra er een antwoord gegeven was, werd het kaartje op tafel gelegd en het volgende getrokken. Na 16 antwoorden werd de tijd genoteerd.
Nadat een aantal koppeltjes geweest was, mocht het eerste stel het nog eens overdoen; zij waren immers proefkonijnen geweest toen de bedoeling nog niet helemaal duidelijk was. Het stel met de beste tijd – de tijden werden op het bord genoteerd – mocht een dropsleutel pakken.

In de kantine en tijdens de franse les

Het spel was een groot succes. Tot verbijstering van mijn collega's zaten kinderen in de pauzes (en in hun lessen) kwadraten te oefenen. Ze wilden elke dag spelen, niet vanwege de dropsleutel – die gaf ik niet als we in de laatste momenten van een les teams de gelegenheid boden hun tijd scherper te zetten – ook omdat ze andere klassen wilden voorblijven. Het zat een klas met overwegend GL-leerlingen niet lekker dat een stel uit 2c (KBL) lang de beste tijd bleef houden. Van dat stel uit 2c was één mijn allerlastigste leerling. Dat hij hier zo goed in was, verbaasde hem zelf ook, maar toen hij eenmaal bovenaan stond wilde hij daar wel graag blijven. De GL-klassen vroegen om de serie uit te breiden tot 25^2. Dat deed ik niet; ik breidde de serie uit met de negatieve getallen van -10 tot en met -1. Bij 'min tien kwadraat' moest als antwoord 'plus honderd' gegeven worden om duidelijk te maken dat de leerling wist dat het van teken veranderde (en om dit erin te hameren).

Over de auteur
Frans Ballering heeft zes jaar gewerkt als wiskundeleraar op mavo, havo en vwo en daarna dertig jaar op de tweedegraads lerarenopleiding. Sinds 1 september 2010 is hij met pensioen (fpu).
E-mailadres: *fransballering@hetnet.nl*

Vanuit de oude doos

A° 1925

[Ton Lecluse]

In deze rubriek bespreek ik enkele opgaven die de vorige eeuw – tot in de tweede wereldoorlog – in toelatingsexamens voor universiteiten zijn gebruikt. Dit jaar ligt de nadruk op algebra, goniometrie en analytische meetkunde. Ik beperk me tot opgaven die, naar mijn mening, ook door de huidige leerlingen op het vwo gemaakt moeten kunnen worden. Wellicht met enige hulp of als praktische opdracht.

Dit keer een synthetisch-meetkundige opgave, een meetkundige plaats en een stukje algebra.
Wellicht vindt u het leuk om de opgaven eerst zelf te proberen. Misschien vindt u de opgaven wel erg eenvoudig voor uzelf, maar uw leerlingen hebben wellicht een andere mening. Verderop treft u mijn uitwerkingen aan.

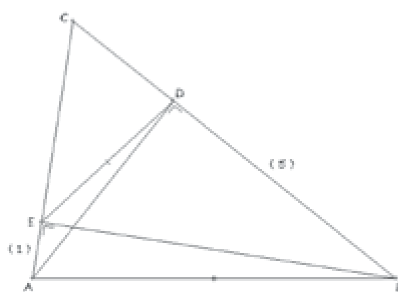
Opgave 1 (1926)
In driehoek ABC is D het voetpunt van de hoogtelijn uit A, E het voetpunt van de hoogtelijn uit B. Indien gegeven is: $ED = \frac{1}{2}AB$ en $BD : AE = 5 : 1$, vraagt men de hoeken van driehoek ABC te berekenen.

Opgave 2 (1926)
Van driehoek ABC is gegeven $c = 10$ cm. $\angle A - \angle B = 45°$. Welke is de meetkundige plaats van C betrokken op AB en de loodlijn in A op AB als coördinatenassen?

Opmerking. Het is dus de bedoeling dat er een assenstelsel wordt gebruikt met A als oorsprong en AB als horizontale as. Met c wordt de lengte van AB bedoeld.

Opgave 3 (1925)
Men vraagt a en b zo te bepalen dat teller en noemer van de breuk
$$\frac{x^3 - ax^2 + 17x - 10}{x^3 - bx^2 - 4x + 20}$$
een factor van de tweede graad in x gemeen hebben.

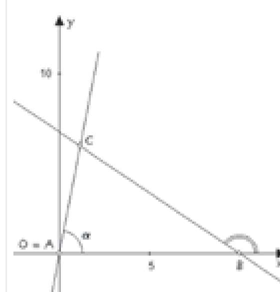
Uitwerkingen
Opgave 1 – Gegeven AD en BE zijn hoogtelijnen; en verder:
(1.1)… $ED = \frac{1}{2}AB$
(1.2)… $BD = 5 \cdot AE$



figuur 1

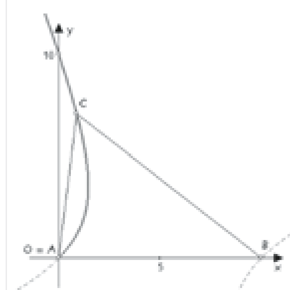
Zie verder ***figuur 1***. Daarin is $\angle CDE = 180° - \angle BDE$ en ook $\angle BAC = 180° - \angle BDE$, want $ABDE$ is een koordenvierhoek. Dus is $\angle CDE = \angle BAC$ en zijn de driehoeken ABC en DEC gelijkvormig, met een verhouding van 1 : 2 tussen de zijden, volgens (1.1). Dus:
(1.3)… $CE = \frac{1}{2}BC$
(1.4)… $CD = \frac{1}{2}AC$
Dus is driehoek CDA een 30°-60°-90°-driehoek. Er geldt $\angle C = 60°$ en:
(1.5)… $AD = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot AC$
Uit (1.2) volgt dan:
(1.6a)…
$$BD = 5 \cdot AE = 5(AC - EC) = 5(AC - \tfrac{1}{2}BC) = 5 \cdot AC - 2\tfrac{1}{2} \cdot BC$$
Ook is:
(1.6b)… $BD = BC - DC = BC - \frac{1}{2}AC$
Uit (1.6a) en (1.6b) blijkt:
$5 \cdot AC - 2\frac{1}{2} \cdot BC = BC - \frac{1}{2}AC$
Dus $BC = \frac{11}{7}AC$, zodat:
(1.7)… $BD = \frac{11}{7}AC - \frac{1}{2}AC = \frac{15}{14}AC$
Uit (1.5) en (1.7) volgt:
$$\tan\angle ABD = \frac{AD}{BD} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot AC}{\frac{15}{14} \cdot AC} = \frac{7}{15}\sqrt{3}$$
Zodat $\angle ABC \approx 38{,}948°$ (of 38°56'54").
Dus:
$\angle BAC \approx 180° - 60° - 38{,}948° = 81{,}052°$ (of 81°3'6")

Opgave 2 – In het betreffende assenstelsel (met $B = (10,0)$; ***zie figuur 2***) hebben de lijnen AC en BC opvolgend als vergelijking:
$y = (\tan\alpha) \cdot x$
$y = -\tan(\alpha - 45°) \cdot (x - 10)$



figuur 2

Een van de somformules van de goniometrie is $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta}$.
Dus: $-\tan(\alpha - 45°) = -\frac{\tan\alpha - 1}{1 + \tan\alpha} = \frac{1 - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha}$
Gelijkstellen van beide vergelijkingen geeft:
$$(\tan\alpha) \cdot x = \frac{1 - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha} \cdot (x - 10)$$
Stel nu $\tan\alpha = p$, en maak dan x vrij:
(2.1)… $x = \dfrac{10p - 10}{p^2 + 2p - 1}$
Schrijf de vergelijking van AC om tot $p = \frac{y}{x}$, en substitueer dit in (2.1). Na enige herleiding krijg je:
(2.2)… $x = \dfrac{10xy - 10x^2}{y^2 + 2xy - x^2}$
Dit geeft uiteindelijk $x^2 - 2xy - y^2 - 10x + 10y = 0$, de vergelijking van een hyperbool.



figuur 3

Wanneer deze hyperbool wordt getekend in het assenstelsel (***in figuur 3***), zie je dat punt C een deel van de *linker* hyperbooltak doorloopt, en dat de rechter hyperbooltak

door B gaat.
De meetkundige plaats is alleen het deel van de hyperbool dat boven de x-as ligt en door A gaat.

Opgave 3 – De breuk moet de volgende gedaante hebben:

$$\frac{(x+p)(x^2+qx+r)}{(x+s)(x^2+qx+r)}$$

Uitwerken van teller en noemer geeft:

$$\frac{x^3+(p+q)x^2+(pq+r)x+pr}{x^3+(q+s)x^2+(sq+r)x+rs}$$

Vergelijk de coëfficiënten hiervan met die in de gegeven breuk. Er geldt dus:

(3.1)… $p + q = -a$
(3.2)… $pq + r = 17$
(3.3)… $pr = -10$
(3.4)… $q + s = -b$
(3.5)… $qs + r = -4$
(3.6)… $rs = 20$

Zes vergelijkingen met zes onbekenden, en niet lineair! Maar dit stelsel kan handig worden aangepakt.
Deel (3.3) door (3.6). Je krijgt dan:
(3.7)… $p = -\frac{1}{2}s$
Nu geven (3.2) en (3.7) $-\frac{1}{2}qs + r = 17$.
Hieruit kan qs met (3.5) worden geëlimineerd. Dan volgt:
$r = 10$
Hierna zie je snel:
(3.6) geeft $s = 2$, (3.5) geeft $q = -7$, en (3.4) geeft $b = 5$;
(3.3) geeft $p = -1$ en (3.1) geeft $a = 8$.

Bron

Dr. Th.G.D. Stoelinga, Dr. M.G. van Tol (1958): *Wiskunde-Opgaven van de toelatingsexamens tot de Universiteiten van 1925 tot en met 1958*. Zwolle: N.V. Uitgevers-maatschappij W.E.J. Tjeenk Willink (8e druk).

Over de auteur

Ton Lecluse is docent wiskunde aan het Vathorst College te Amersfoort.
E-mailadres: *alecluse@casema.nl*

Het Geheugen

[Harm Jan Smid]

Problemen en discussies die nu het wiskundeonderwijs beheersen, hebben soms parallellen in een ver of niet zo ver verleden. Soms lijkt het of er niets veranderd is, maar vaak is het toch net even anders. In de rubriek 'Het Geheugen' pakt Harm Jan Smid zo'n actueel onderwerp op en speurt naar historisch vergelijkingsmateriaal. Soms leerzaam, bijna altijd relativerend.

Van mei tot mei

Deze aflevering van 'Het Geheugen' verschijnt in de maand mei. In de eerste week van mei worden uit ons nationale geheugen herinneringen opgehaald aan de bezettingsjaren van de Tweede Wereldoorlog; van mei 1940 tot mei 1945.
Wat betekende de Duitse bezetting voor het wiskundeonderwijs in die tijd? Wiskunde is, anders dan bijvoorbeeld geschiedenis of biologie, niet zo'n voor de hand liggend slachtoffer voor waanideeën over het Germaanse *Herrenvolk*. In Duitsland werd overigens wel degelijk getracht ook wiskunde en wiskundeonderwijs een nationaal-socialistisch stempel te geven. U.H. van Wijk schreef in 1938 in *Euclides* een merkwaardig artikel over deze pogingen, waarbij het niet duidelijk wordt of hij die nu belachelijk vindt of juist toejuicht. De bezetting had in Nederland natuurlijk ook voor het wiskundeonderwijs de nodige gevolgen, in hoofdzaak heel tragische in het persoonlijke vlak, maar toch ook op het gebied van leerplannen en lesuren. Mei 2011 is een goed moment om daar nog eens bij stil te staan.

Leraren en hoogleraren

In november 1940 werden alle Joodse leraren en hoogleraren geschorst, en op 1 maart 1941 volgde hun ontslag. Joodse leraren mochten alleen nog maar aan speciale Joodse scholen lesgeven. Vermoedelijk ging het om tien tot twintig Joodse wiskundeleraren. Een van de ontslagen hoogleraren was D. van Dantzig, die net op 9 mei 1940 hoogleraar wiskunde aan de (toen nog) Technische Hogeschool Delft geworden was. Daardoor ontstond er formeel een vacature, maar in eerste instantie wilden de wiskundigen die hiervoor gevraagd werden, niet op die 'besmette' plaats benoemd worden. De penningmeester van Wimecos (de vereniging van leraren in de Wiskunde, Mechanica en Cosmographie aan de HBS), O. Bottema, die ook benaderd werd, kwam echter met de curatoren overeen dat gezegd zou worden dat hij op de plaats van de in 1935 vertrokken hoogleraar Versluys benoemd werd en aanvaardde toen de benoeming. Het was een kromme redenering, want op Versluys' plaats was nu juist Van Dantzig benoemd en Bottema was dus gewoon diens opvolger. Dat Bottema's benoeming gevoelig lag, blijkt uit een briefje in het Wimecos-archief. De voorzitter, J. Spijkerboer, schreef op 29 augustus aan de secretaris dat hij de vorige dag van N.G.W.H. Beeger, de allereerste penningmeester van Wimecos, gehoord had dat Bottema wel degelijk op de plaats van Van Dantzig benoemd was, en hij zei daarover: 'Is dat het geval, dan zou ik mijn felicitatie in Euclides liever niet geplaatst zien en zou ik willen volstaan met de mededeling van de benoeming. Weet jij er van en is het nog te veranderen?'. Die felicitatie heeft, zij het ondertekend door secretaris Tekelenburg, wel in *Euclides* gestaan, zonder dat duidelijk is of Spijkerboer daar toch mee instemde, of dat het al te laat was om de plaatsing terug te draaien.
Het ontslag van de Joodse leraren was onderdeel van een patroon van uitsluiting en isolatie. Een andere maatregel op dit vlak was het verbod van oktober 1941 voor Joden om lid te zijn van niet-Joodse verenigingen. Zij moesten zelf hun lidmaatschap opzeggen, en inderdaad kwamen daarna een paar opzeggingen bij Wimecos binnen; (***zie figuur 1*** op pag. 269).
Het jaarverslag van december 1941 meldde dat '6 leden door overheidsmaatregelen ophielden lid van onze Vereeniging te zijn', en dat slaat natuurlijk op de Joodse leden. Zeker niet alle Joodse leden hebben hun lidmaatschap opgezegd. Een jaar later constateerde de penningmeester namelijk dat een aantal leden hun contributie niet betaald hadden, en daar waren Joodse leden bij die inmiddels ondergedoken of gedeporteerd waren; ***zie figuur 2***.

Goed en fout

Het Wimecos-archief bevat ook de opzegging van W.F. de Groot, per 1-1-1942. De Groot was een bekend man in de wiskundewereld. Hij was directeur van de Dalton-HBS in Den Haag, publiceerde over opvoedkundige vraagstukken, over het Dalton-systeem, nam deel aan de discussies binnen de kring van Tatiana Ehrenfest, schreef schoolboeken voor algebra en differentiaal- en integraalrekening en publiceerde een studie over de geschiedenis van het wiskundeonderwijs op de Latijnse scholen en de gymnasia. De Groot zegde zijn lidmaatschap op omdat hij wethouder van onderwijs in Den Haag werd en dat kon toen natuurlijk maar één ding betekenen: De Groot was NSB'er. Vermoedelijk heeft hij dat voor de oorlog geheim gehouden. Het was al ver voor de oorlog aan ambtenaren verboden om lid te zijn van de NSB en het is moeilijk voorstelbaar dat het Haags gemeentebestuur dat van de directeur van een gemeentelijke HBS geaccepteerd zou hebben. Maar wie zich in 1942 nog tot wethouder liet benoemen, was ongetwijfeld een overtuigde nazi.
De Groot was binnen Wimecos niet bijzonder actief, maar dat was hij in de twintiger jaren wel geweest in een andere organisatie, met de merkwaardige naam L.i.W.e.N.a.G.e.L. – gemakshalve trouwens meestal zonder puntjes geschreven. Dat was de 'Groep Leraren in de Wiskunde en Natuurwetenschappen aan Gymnasia en Lycea'. Liwenagel was geen zelfstandige vereniging, maar een onderdeel van het 'Genootschap van Leraren aan Nederlandsche Gymnasiën'. De Groot, toen leraar aan het Haags gymnasium, zat in allerlei commissies van Liwenagel en had daarbij ongetwijfeld vaak contact met C. de Jong, conrector en wiskundeleraar aan het gymnasium te Leiden. De Jong was bestuurslid van het Genootschap en ook actief in Liwenagel. Ze hadden bovendien samen een serie leerboeken voor algebra voor het gymnasium en de hbs geschreven. Ik weet niet of ze ook bevriend geweest zijn, maar het tragische einde van De Jong zal misschien toch ook De Groot niet onberoerd hebben gelaten. Toen in januari 1944 in Leiden een aanslag werd gepleegd op de directeur van het Gewestelijk Arbeidsbureau, pakten de Duitsers veertig Leidse burgers op en schoten een dag later als represaille drie van hen dood. Eén van hen was De Jong. Het bestuur van Wimecos nam contact op

met De Jong's familie en zorgde ervoor, in samenwerking met Wijdenes, dat De Jong in *Euclides* herdacht werd; ***zie figuur 3***.
De Groot was de bekendste foute wiskundeleraar, maar er zullen er meer geweest zijn. A. Bartels meldt in zijn *Een eeuw Middelbaar Onderwijs* dat na de oorlog 71 'foute' leraren werden ontslagen, en natuurlijk moeten daar ook wiskundeleraren bij geweest zijn. Na de oorlog schreef Wimecos-voorzitter Spijkerboer een brief aan de onderwijsinspecteurs met de vraag of deze hem konden vertellen welke wiskundeleraren er in de oorlog omgekomen waren en wie er in de oorlog fout waren geweest. Misschien heeft hij met de gedachte gespeeld die laatsten als lid van Wimecos te royeren. Daar kwam het in ieder geval niet van. Alle inspecteurs lieten Spijkerboer weten dat ze niet over die informatie beschikten en dat ze het ook niet op hun weg vonden liggen om daar werk van te maken.

Vakken en lessen

Met ingang van de cursus 1941/1942 werd een aantal wijzigingen in de lessentabel voor de HBS doorgevoerd. In de eerste klas werd het aantal uren wiskunde teruggebracht van 6 naar 5, in de vijfde (examen)klas van de HBS-B het aantal uren mechanica van 2 naar 1. Mechanica was toen een apart vak en werd meestal door de wiskundeleraar gegeven – vandaar ook de naam Wi***me***cos – en gold veel meer als wiskunde dan als natuurkunde. Die vermindering van 6 naar 5 uur was niet zo problematisch en is ook na de oorlog niet teruggedraaid. De teruggang van 2 naar 1 uur mechanica, nog wel in een examenklas, gaf veel meer problemen. De inspectie vroeg Wimecos een aangepast leerplan te ontwerpen, en het bestuur had daar grote moeite mee. Voorzitter Spijkerboer wilde zelfs aftreden om deze kwestie, en werd maar met moeite door zijn medebestuursleden daarvan weerhouden. Na de oorlog werd het aantal lesuren weer op 2 gebracht. Waarom in de urentabellen voor wiskunde en mechanica werd ingegrepen, is eigenlijk niet duidelijk. Dat in de oorlog het aantal uren Duits werd vermeerderd ten koste van het aantal uren Engels, wekt geen verbazing, maar waarom bijvoorbeeld wiskunde een uur moest prijsgeven ten gunste van handtekenen, is raadselachtig. Inspecteur Van Andel, vermoedelijk geen krachtfiguur, beriep zich ook nog op de moeilijke omstandigheden, maar omdat het totaal aantal lesuren niet gewijzigd werd, kan dat geen argument geweest zijn.

Wel begrijpelijk is dat de oorlogsomstandigheden, zoals huisvestingsproblemen en uitvallende lessen, regelmatig dwongen tot aanpassingen, dat wil zeggen inperkingen, van het (examen)programma. Dat gaf natuurlijk steeds veel discussie over hoe zoiets geïnterpreteerd moest worden: wat werd nu precies wel en niet gevraagd? ***Zie figuur 4***.
Een wel heel drastische ingreep was het laten vervallen van Beschrijvende Meetkunde als examenvak in 1942. Leraren hadden daar grote bezwaren tegen, niet in het minst omdat dat vak meestal goed gemaakt werd en de vaak slechte resultaten voor stereometrie compenseerde. In 1945 werd uiteindelijk helemaal geen eindexamen meer afgenomen, maar dat betrof alle vakken, niet alleen wiskunde.

Wimecos en Liwenagel

De bezetting heeft in het wiskundeonderwijs vooral dramatische gevolgen gehad voor de daarbij betrokken personen: de leerlingen (een groep die hier niet apart aan de orde is gekomen), en de leraren. Voor velen van hen was de oorlog een tragedie. Dat geldt niet in die mate voor het wiskundeonderwijs zelf. De ingrepen daarin bleven toch beperkt, al waren ze hinderlijk of zelfs ergerniswekkend. De Duitsers hebben niet geprobeerd ook inhoudelijk een stempel op het wiskundeonderwijs te zetten.
De bezetter liet verenigingen als Wimecos en Liwenagel, afgezien natuurlijk van het gedwongen vertrek van de Joodse leden, met rust. Met name Wimecos heeft eigenlijk weinig problemen ondervonden en een groot deel van de activiteiten kon gewoon doorgaan. Voorzover dat niet kon, was dat door moeilijkheden die alle organisaties in die tijd hadden, bijvoorbeeld door papiergebrek, waardoor ook de uitgave van *Euclides* in het laatste oorlogsjaar gestaakt moest worden, of door reisbeperkingen, waardoor vergaderen onmogelijk werd.
Voor Liwenagel verliep de oorlog dramatischer. De groep verloor niet alleen voorzitter De Jong, maar ook vice-voorzitter H.C. Schamhardt overleefde de oorlog niet, evenmin als oud penningmeester W.L. Varossieau. Het feit dat voormalig bestuurder De Groot een NSB'er bleek te zijn, moet een pijnlijke verrassing voor veel leden zijn geweest. Bij het bombardement op het Bezuidenhout in Den Haag ging ook nog eens het archief verloren.
Het vaste tekstje bij deze rubriek eindig met de woorden 'altijd relativerend'. Dat zou je misschien over de ernst van de problemen die het wiskundeonderwijs *sec* ondervond, nog wel kunnen volhouden. Voor de problemen die veel betrokkenen, vooral natuurlijk de Joodse leerlingen en leraren, ondervonden, valt er niets te relativeren. De bezetting, van mei tot mei, was het ergste wat hun kon overkomen, en kostte 16 wiskundeleraren en een paar duizend leerlingen het leven.

Transcripties

[1]
R'dam, 25 Okt. 41.
Geachte Heer,
Door een nieuwe verordening ben ik, zeer tot mijn leedwezen, gedwongen u te verzoeken mij als lid van "Wimecos" te schrappen. Ik zou het zeer op prijs stellen "Euclides" nog regelmatig te mogen ontvangen.
Ik ben thans als leraar verbonden aan het Gem. Lyceum voor Joodse leerlingen, alhier.
Hoogachtend,
J. Brandel

[2]
Zuthpen 9-9-'43
Geachte kollega
De heer A.B. Menk is een Israëliet. Enige maanden geleden is hij plotseling naar onbekende stemming vertrokken. Ook mij is zijn onderduik-adres onbekend.
Hoogachtend
H.W. Hagenes (?)

[3]
Waarde heer T.
Nee, ik wist er niets van. "Euclides" stelt zich beschikbaar voor Uw mededeling in dit geval, natuurlijk. En met portret, dat is heel goed.
Zorgt U voor het verkrijgen van een portret; zend dat mij direct op en vraag aan het bestuur van Liwenagel een bericht over hem; we zullen dat opnemen.
Ontzettend, die prachtkerel als De Jong was.
Ook met geboortedatum en dag van zijn "heengaan" en zijn levensloop.
Mij dunkt, U kunt het best even naar Leiden gaan en de weduwe bezoeken.
Ik laat het aan U over; dezerzijds de volle medewerking.
Met beste gr. en vaderlandse handdruk
P. Wijdenes 11 Jan. 1944

R'dam, 15 Oct. 41.
Geachte Heer,
Door een nieuwe verordening ben ik, zeer tot mijn leedwezen, gedwongen U te verzoeken mij als lid van „Wimecos" te schrappen. Ik zou het echter zeer op prijs stellen „Euclides" nog regelmatig te mogen ontvangen.
Ik ben thans als leraar verbonden aan het Gem. Lyceum voor Joodse leerlingen, alhier.
Hoogachtend,
J. Brandel
J. Brandel,
Lumeystr. 19,
Rotterdam-C.

figuur 1 Het kaartje met de opzegging van het lidmaatschap van J. Brandel. Zijn naam wordt niet genoemd in het gedenkboek van de in de oorlog omgekomen leraren, dus vermoedelijk heeft hij de oorlog overleefd. Zie ook [1].

Zutphen 9-5-'43
Deventerweg 66.
Geachte kollega,
De heer A.B. Menk is een Israëliet. Enige maanden geleden is hij plotseling naar onbekende bestemming vertrokken. Ook mij is zijn onderduik-adres onbekend.
Hoogachtend
[illegible]

figuur 2 A.B. Menk had zich kennelijk niet afgemeld bij Wimecos maar betaalde na zijn onderduik natuurlijk zijn contributie niet meer. De penningmeester heeft vermoedelijk bij een collega geïnformeerd wat er aan de hand was. Ook Menk wordt niet bij de omgekomen leraren genoemd. Zie ook [2].

figuur 3 De reactie van P. Wijdenes, de hoofdredacteur van *Euclides*, op het nieuws van de dood van C. de Jong, met het aanbod om daaraan in *Euclides* aandacht te besteden. Zie ook [3].

Vereniging van Leeraren in de Wiskunde, de Mechanica en de Cosmografie aan Hoogere Burgerscholen en Lycea (Wimecos).

Eindexamenprogramma Wiskunde 1944.

Stelkunde.
Geen samengestelde interest.
Geen exponentiele vergelykingen
Geen differentiaal- en integraalrekening.
Geen functie;

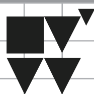
$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$$

Goniometrie.
Geen extremen.
Meetkunde.
Geen meetkundige behandeling van parabool, ellips en hyperbool.
Stereometrie.
Geen stelling van Euler, regelmatig twaalfvlak en twintigvlak.
Beschrijvende Meetkunde.
Geen kegel, cilinder en bol in eenvoudige ligging.

Mechanica.
Geen plaatsbepaling van het zwaartepunt en geen verticale cirkelbeweging.

figuur 4 Beperkingen in het eindexamenprogramma voor wiskunde en mechanica 1944

Over de auteur
Harm Jan Smid was lerarenopleider en medewerker wiskunde aan de TU Delft, en promoveerde daar op de geschiedenis van het wiskundeonderwijs in de eerste helft van de negentiende eeuw. Hij is momenteel voorzitter van de Historische Kring Reken- en Wiskundeonderwijs (HKRWO).
E-mailadres: *h.j.smid@ipact.nl*



Van de bestuurstafel – 1

[Kees Lagerwaard]

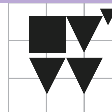
VMBO-docenten

Het ledental van de Vereniging is al jarenlang redelijk stabiel. Afgelopen jaar mochten we weer een flink aantal nieuwe leden begroeten, maar helaas verliezen we een ongeveer even groot aantal oudere leden. Opvallend is het geringe aantal leden dat lesgeeft in het vmbo, hoewel dat toch het schooltype is met veruit het grootste aantal leerlingen dat eindexamen wiskunde doet, en waar dus ook de meeste wiskundelessen worden gegeven. Nu worden er in het vmbo vrij veel lessen wiskunde gegeven door docenten die zich niet in de eerste plaats wiskundedocent voelen. Denk bijvoorbeeld aan docenten in technische vakken die daarnaast nog wat uren wiskunde geven. Maar ook van de 'echte' wiskundedocenten is slechts een beperkt deel NVvW-lid. Dat is zichtbaar in de geringe belangstelling voor examenbesprekingen, en in het aantal artikelen over vmbo-wiskunde in *Euclides* en in een beperkt aantal vmbo-gerelateerde workshops op de studiedag. Ook in de werkgroep vmbo van de Vereniging is nog wel plaats voor betrokken vmbo-docenten. Het bestuur zou graag meer aandacht willen geven aan het vmbo, maar heeft daartoe ook meer inbreng nodig vanuit het vmbo. Midden maart is door het bestuur een brief gestuurd naar een duizendtal vmbo-scholen. In die brief wordt uitgelegd waarom in elke vmbo-school toch ten minste één docent lid zou moeten zijn van de NVvW. We hopen dat dit tot een flink aantal nieuwe leden zal leiden. Tegelijkertijd zullen wij ons extra inspannen om de vmbo-docenten ervan te overtuigen dat een NVvW-lidmaatschap eigenlijk onmisbaar is.

Examens rekenen

Zoals bekend stelt het College voor Examens (CvE, voorheen Cevo) de centrale eindexamens vast. De CvE heeft bij wiskunde drie vaksecties: vmbo, havo/vwo wiskunde A en havo/vwo wiskunde B. In elk van deze vaksecties zit een docent die door het bestuur van de NVvW is voorgedragen.
Over niet al te lange tijd zullen er ook voor rekenen centrale examens komen (we kunnen ze ook landelijke eindtoetsen noemen), één voor vmbo op niveau 2F en één voor mbo, havo en vwo op niveau 3F. Ook deze toetsen zullen door een CvE-commissie worden vastgesteld.
De CvE heeft de NVvW uitgenodigd voor elk van deze twee vaststellingscommissies een lid voor te dragen. Omdat het niet om wiskunde gaat maar om rekenen, is het voor het bestuur minder gemakkelijk om daarvoor geschikte personen voor te dragen. Deze leden zullen immers een meer dan gemiddelde affiniteit met het rekenen moeten hebben, naast kennis van het rapport Meijerink over de rekenniveaus.

U wordt daarom van harte uitgenodigd namen van dergelijke collega's onder de aandacht van het bestuur te brengen.



Van de bestuurstafel – 2

[Henk van der Kooij]

Wiskunde werkt; reken maar!

Toevallig belandt mijn bijdrage aan de bestuurstafel, net als vorig jaar, in de *Euclides* waarin ook de eerste aankondiging van de studiedag van 5 november 2011 (zie pag. 274) staat. Dat biedt de mogelijkheid om daarover wat te zeggen vanuit mijn bestuurstaak bij die dag. Verder wil ik wat zeggen over de ontwikkelingen rond aansluitingsproblematiek vo-ho op algebra en de onstuimige ontwikkelingen rond het rekenen.

Studiedag

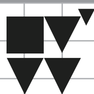
Marianne Lambriex is de grote motor achter de organisatie van de hele dag; ik mag me vooral bezighouden met de inhoudelijke vulling van de presentaties en werkgroepen bij het thema dat binnen het bestuur wordt gekozen. Het bestuur is blij met de jaarlijkse grote toeloop van enthousiaste docenten. Maar er is ook wat zorg over het geringe aantal docenten vanuit het vmbo dat op de studiedagen komt. Er wordt elk jaar geprobeerd om een aantal werkgroepen te organiseren die speciaal aantrekkelijk zijn voor het vmbo. Door het bestuur is voor dit jaar als thema gekozen 'Wiskunde werkt; reken maar!'. Daar kun je veel kanten mee op. 'Wiskunde werkt' leent zich bijvoorbeeld uitstekend voor de koppeling van wiskunde aan de beroepsgerichte vakken van het vmbo en datzelfde geldt ook voor het rekenen. Wij hopen daarom ook op interessante bijdragen die zijn gericht op het vmbo. Natuurlijk zijn koppelingen van rekenen en wiskunde aan de andere schoolvakken ook interessant voor havo en vwo. Uiteraard krijgt de actualiteit van de nieuwste politieke focus, op wiskunde als kernvak en de daaraan gekoppelde roep om meer opbrengstgericht te werken met wellicht tussentijdse toetsing (Onderwijsraad) en op het rekenen, ruim aandacht. Ook de vernieuwing van de examenprogramma's voor havo/vwo (cTWO) die dichterbij komt zal weer aan bod komen.
De volgende bespiegelingen zijn deels persoonsgebonden en deels bestuursgebonden.

Toetscultuur

Ik word elke keer ongerust als ik weer een instantie hoor roepen dat er meer getoetst moet worden, zoals de Onderwijsraad doet in het advies aan de minister 'Naar hogere leerprestaties in het VO'. Efficiëntie en effectiviteit in het onderwijs lijken alleen maar gewaarborgd te kunnen worden als er met de regelmaat van de klok (centraal) getoetst wordt. In het kader van de aandacht voor taal en rekenen heb ik dat ook al gehoord. Er wordt al hardop gedacht aan het idee dat scholen worden verplicht via een leerlingvolgsysteem (LVS) te tonen dat ze het taal- en rekenonderwijs serieus nemen. Dat kan leiden tot toetsgericht onderwijs en dat verhoogt in mijn ogen zeker niet de kwaliteit van het onderwijs zelf. Ik ken deze toetspraktijken van dichtbij uit de Verenigde Staten en Engeland. Ze leiden vaak tot verkrampt onderwijsgedrag bij docenten. Uiteraard onderschrijf ik de poging om de leerprestaties te verhogen, maar de docent en de school moeten de verantwoordelijkheid nemen en krijgen om dat zelf goed in te vullen. En het zou de minister sieren als zij inziet en erkent dat het verhogen van de leerprestaties bij wiskunde niet goed mogelijk is met het geringe aantal contacturen dat aan wiskunde is toebedeeld. Mijn vermoeden, gebaseerd op ervaringen uit het verleden, is dat alles weer budget-neutraal moet worden bereikt. En dat dus de druk op de (wiskunde)onderwijzenden weer verder wordt vergroot. Zo gaat dat helaas bijna altijd met de politiek. Het bestuur zal deze punten zeker in de gaten houden en waar mogelijk inbreng leveren.

Algebraïsche vaardigheden

De aansluitingsproblematiek vo-ho op algebraïsche vaardigheden heeft lange tijd voor flinke, af en toe zeer felle, landelijke discussies gezorgd. Bij de herziene programma's van 2007 zijn deze vaardigheden aangescherpt via de syllabi. In de NKBW-projecten [NKBW staat Nationale Kennisbank Basisvaardigheden Wiskunde voor red.] is er een goede samenwerking geweest tussen vo en ho in pogingen om de problemen in kaart te brengen en mogelijke oplossingswegen te vinden. Daarbij zijn onder andere toetsen ontwikkeld en afgenomen in vo en wo. In september 2010 heeft een aantal opleidingen (wiskunde in Leiden en Utrecht, en scheikunde in Utrecht) de toets voor het tweede achtereenvolgende jaar afgenomen. Van alle drie opleidingen kreeg ik te horen dat de resultaten aanzienlijk beter waren dan de jaren daarvoor. Niet verwonderlijk als je bedenkt dat het in 2010 de eerste lichting studenten betrof die de 2007 programma's hebben gevolgd. Maar het is uiteraard plezierig om te zien dat iets van de problematiek aan het afnemen is en dat de aanpassingen van 2007 dus kennelijk al effect sorteren.
Er is een nieuw project gestart (met de naam 'Onbetwist') waarin we nog twee jaar kunnen doorgaan om de problematiek aan te pakken. Ik heb daarin weer de verantwoordelijkheid voor de toetsen. Het bestuur is bij deze projecten betrokken via een klankbordgroep. Een ander positief gevolg van de NKBW-projecten zie ik binnen de eigen universiteit (Universiteit Utrecht). Omdat binnen de NKBW-projecten het probleem eerlijk op tafel kwam als een gezamenlijke verantwoordelijkheid van vo en ho, is er binnen de universiteit gezocht naar manieren waarop de universiteit zelf de problemen kan aanpakken, zonder steeds alleen maar met een beschuldigende vinger naar het vo te wijzen. Er zijn nu allerlei activiteiten (*summer school*, 'remediërend'



onderwijs bij de start van het eerste jaar) die er voor moeten zorgen dat alle studenten een eerlijke kans op studiesucces krijgen. Bij andere universiteiten gebeuren dergelijke dingen ook. Ik ben daar blij mee, omdat het gezamenlijk dragen van verantwoordelijkheid in mijn ogen de enige manier is om doorlopende leerlijnen zonder echte knik- of breekpunten te bewerkstelligen. Wij, in het vo, zouden ook veel meer ons best moeten doen om helder te krijgen hoe en wat (en wat niet) er wordt geleerd in het po, om daarmee voor leerlingen een werkbaar en veilig leerklimaat te creëren als ze vol verwachting onze school binnenkomen, waarin zij zich verder kunnen ontplooien. Dat lijkt veel meer constructief dan op te merken dat 'ze bij rekenen niks meer leren in de basisschool'.
Dat brengt mij bij het andere politieke hot item: de rekentoetsen.

Rekenen: referentieniveau's 2F en 3F

Misschien is er bij het verschijnen van deze *Euclides* al wat meer duidelijkheid over de toetsen op niveau 2F (bedoeld voor vmbo en mbo niveau 2 en 3) en 3F (bedoeld voor havo, vwo en mbo niveau 4), maar zeker is dat niet.
Ik ben, zowel vanuit het FI als vanuit het bestuur van de NVvW, vrij nauw betrokken bij het proces dat moet leiden tot meer gerichte aandacht voor rekenen in het vo. Vanuit die betrokkenheid constateer ik dat er in het veld veel onduidelijkheid bestaat over het 'wat en hoe'. Daarom probeer ik hier, op persoonlijke titel, wat meer informatie te verstrekken. Dat doe ik op 23 maart (het moment van schrijven). Omdat politieke besluiten voor de zomer moeten zijn genomen, kan het goed mogelijk zijn dat er al nieuwe informatie beschikbaar is als u dit leest. Overigens kunt u zelf, via de enige echte officiële site rond taal en rekenen (*www.taalenrekenen.nl*) geïnformeerd blijven over alle regelingen die OCW voor het onderwijs in petto heeft, en u vindt daar ook links naar andere bronnen, zoals die van het steunpunt taal en rekenen vo.
Wat is er nu gebeurd tussen de start – een artikel in *Trouw* van begin 2006 [1], waarin de slechte prestaties van Pabo-studenten op een rekentoets werden beschreven – en het heden van april 2011, waarin de rekentoets als onderdeel van het examen alle aandacht lijkt op te eisen? Een kort en niet precies, want persoonlijk ingekleurd, overzicht.

1. Januari 2006

De Tweede Kamer wordt wakker en begint een discussie over een probleem dat al veel eerder bekend was bij de Pabo's: de instroom via de 'sluiproute' vmbo Zorg & Welzijn (geen wiskunde vanaf klas 3) – onderwijsassistent in het mbo – toegang tot Pabo heeft onvoldoende niveau om de Pabo op het gebied van rekenen aan te kunnen. Deze discussie is mede aanleiding om een expertgroep 'taal en rekenen' in te stellen (mei 2007) die het probleem in kaart moet brengen en met voorstellen voor oplossingswegen dient te komen. Daarbij wordt de koppeling aan Pabo verbreed naar alle leerlingen en naar doorlopende leerlijnen. De expertgroep krijgt van OCW een sjabloon mee waarbinnen zij moet opereren: de indeling in niveau's 1, 2 en 3 met onderscheid tussen F (fundamenteel) als ondergrens en S (streef) als mogelijk te bereiken bovengrens. Niveau 1F(S) gaat over de grens po-vo, 2F(S) gaat over de grens vmbo-mbo (F) en onderbouw havo/vwo-bovenbouw (S) en 3F(S) betreft eindniveau mbo (F) en havo/vwo (S).

2. Januari 2008

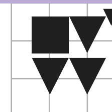
De expertgroep brengt een advies uit en stelt daarin voor om in de beroepskolom (vmbo-mbo-hbo) het F-traject te volgen (1F-2F-3F) en bij havo/vwo het S-traject voor te schrijven (1S-2S-3S). Het verschil tussen de F- en S-trajecten kan gesimplificeerd worden aangeduid met: het F-traject gaat vooral over het functioneel gebruiken van rekenvaardigheden, terwijl het S-traject ook omvat: abstraheren, generaliseren en formaliseren. Deze drie laatste typeringen tenderen richting wiskundeonderwijs.
De adviezen bij het aangeboden rapport, vermeld in een bijlage [2], behelzen onder andere het richten van het onderwijs op enerzijds onderhoud en anderzijds op niveauverhoging bij het rekenen. Voor het vo wordt gepleit voor monitoring zoals in het po (via de PPON [Periodieke Peiling van het Onderwijsniveau, uitgevoerd door Cito; red.]), maar ook wordt de rol van de andere vakken nadrukkelijk genoemd in het onderhouden van vaardigheden, daarbij gebruikmakend van aanpakken zoals ze bij wiskunde zijn geleerd en er wordt gewezen op het feit dat scholing van docenten belangrijk is. Ook wordt de overheid gevraagd een agentschap in te stellen om de implementatie te begeleiden.
Eind 2008 krijgt de NVvW een project toegekend waarin onderzocht wordt of de niveau's 2F en 3F haalbaar geacht kan worden voor leerlingen die geen examen doen in wiskunde. Bij vmbo geldt dat voor een deel van de leerlingen in de sectoren Zorg & Welzijn en Economie; bij havo geldt dit voor het profiel C&M.

3. Oktober 2009

Na veldraadpleging, het verschijnen van 'Een nadere beschouwing' [3] en discussie in de Tweede Kamer wordt vanuit OCW gemeld dat 2013/2014 het eerste cursusjaar zal zijn waarin een landelijke rekentoets op niveau 2F (vmbo) en 3F (havo/vwo, en dus niet 3S, zoals geadviseerd door Meijerink!) wordt afgenomen voor alle leerlingen. Ook wordt, via Cito, een diagnostische toets beschikbaar gesteld aan het onderwijsveld (eerste afname voorjaar 2009 en herhaald in voorjaar 2010) waarmee door scholen onderzocht kan worden of de leerlingen het gewenste niveau beheersen. Deze toetsen blijken echter weinig representatief voor de Meijerink niveau's.

4. De jaren 2010/2011

In maart 2010 gaat het 'Steunpunt taal en rekenen VO' van start (begeleiding van de implementatie). In het najaar van 2010 en het begin van 2011 worden bijeenkomsten belegd die, voor wat het docentenaandeel betreft, voornamelijk wiskundemensen trekt, met daarnaast een handjevol rekencoördinatoren. In december 2010 geeft OCW opdracht aan de SLO om een toetswijzer te ontwikkelen voor 2F en 3F,



waarin de contouren van de landelijke rekentoets moeten worden geschetst, ten dienste van zowel toetsconstructeurs voor de te ontwerpen toetsen als voor docenten als handreiking voor het onderwijs. Ook neemt Cito een tweede pilottoets af onder een aantal scholen. De resultaten van de pilottoetsen en de publicatie van de rekentoetswijzer zullen worden gebruikt om de politieke beslissing rond de start van de landelijke toetsing in 2013/2014 voor de zomer (mijn huidige inschatting) te nemen.

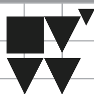
Als ik het geheel tot nu toe overzie, dan denk ik dat de politieke procesgang, waarin met name besluitvorming over landelijke toetsing voorop wordt gezet en er weinig aandacht is voor effectuering van de bedoelingen van Meijerink in het onderwijs, veel onduidelijkheid heeft gecreëerd. Op een of andere manier hebben docenten het idee dat rekenvaardigheid uitsluitend te maken heeft met het feilloos beheersen van de standaardprocedures voor rekenen. Dat wordt zeker ook in de hand gewerkt door de rekenboeken die in allerijl door de commerciële uitgevers op de markt zijn gebracht. Daarbij past het uitbannen (bij de afname van een rekentoets) van een rekenmachine. Zulke uitspraken zijn zeker niet terug te vinden in het rapport van Meijerink. Op de niveau's 2F en 3F gaat het om functioneel rekenen. Dit betekent dat leerlingen in toepassingssituaties moeten weten hoe ze een situatie kunnen vertalen naar een manier om er aan te rekenen en welk soort berekeningen daarbij passen. Weten hoe te rekenen is in die situaties zeker zo belangrijk als het foutloos kunnen uitrekenen zelf. Omdat realistische situaties meestal gepaard gaan met vervelende getallen, is de beschikbaarheid van een rekenmachine voor het uitvoeren van de rekenprocedure een zegen. Meijerink stelt ook dat leerlingen in staat moeten zijn zelf te beslissen wanneer het (niet) handig is om een rekenmachine in te zetten.
Daarnaast is 'rekenen' een wat misleidend woord dat gemakkelijk verkeerde associaties oproept. Naast het rekenen zelf zijn andere kwaliteiten ook van belang.
Binnen het domein 'Meten en meetkunde' is bijvoorbeeld het kunnen oriënteren in een twee- of driedimensionale wereld van belang, terwijl bij het domein 'Verbanden' het kritisch interpreteren en analyseren van informatie die in grafische vorm of in tabelvorm is gegeven van belang wordt geacht. Beide genoemde vaardigheden vallen meer onder het kopje Gecijferdheid dan onder Rekenen. Over deze nuances is zeker nog veel verduidelijkende voorlichting noodzakelijk.
Door de toetswijzercommissies voor vo, die onder aanvoering van SLO en in opdracht van OCW voor begin mei 2011 documenten aan de minister aanbieden, worden de intenties van Meijerink geformuleerd met daarbij een voorstel voor mogelijke toetsvragen om de doelen van 2F en 3F nog verder te concretiseren.
Vanuit het bestuur van de NVvW heeft Gert de Kleuver zitting in deze commissie voor niveau 2F en ik voor niveau 3F. Verder zijn CvE, Cito en de VECON (vakvereniging van economie) vertegenwoordigd. Er is een veldraadpleging geweest (22 en 23 maart) en er wordt nog een expertmeeting gehouden half april. Op basis daarvan wordt het uiteindelijke plan begin mei overgedragen aan OCW.

Rekenen in andere vakken

Parallel aan dit geheel heeft de NVvW het voortouw in een project, samen met andere vakverenigingen, waarin het rekenen in de verschillende vakken wordt geïnventariseerd en beschreven. Het rekenen is immers een zaak die zeker niet alleen wiskunde aangaat, maar ook natuurkunde, scheikunde, biologie, maatschappijwetenschappen, aardrijkskunde, geschiedenis en economie en management en organisatie.
De resultaten van die inventarisatie zullen niet voor de zomer van 2011 beschikbaar zijn, maar wel snel daarna.
Ik ben ervan overtuigd dat, wanneer alle betrokken vakken hun rekenverantwoordelijkheid nemen, het geconstateerde gebrekkige rekenen op middellange termijn kan worden overwonnen. Maar dan zullen docenten van met name de andere vakken geschoold moeten worden in de rekenmethodieken zoals die in het po, maar ook bij wiskunde in de onderbouw, worden geleerd en gehanteerd.
Het politieke verlangen om een geconstateerd probleem voor de volgende verkiezingen op te lossen zal zeker niet worden gehaald. Maar als een schoolbreed beleid wordt geformuleerd waarin aandacht voor rekenen een zichtbaar element is bij veel vakken, ben ik er van overtuigd dat de huidige politieke ongerustheid vanzelf verdwijnt.

Noten

[1] Het oorspronkelijke artikel in *Trouw* is te vinden op: *www.trouw.nl/tr/nl/4324/Nieuws/article/detail/1447178/2006/01/02/Leerkrachten-in-spe-kunnen-niet-rekenen.dhtml*
[2] Die bijlage met aanbevelingen van de commissie Meijerink geeft veel informatie waaruit valt af te leiden welke bedoelingen de commissie had met haar advies. Het is te vinden via: *www.slo.nl/nieuws/dll/Bijlage_bij_het_persbericht.doc/download*
[3] 'Een nadere beschouwing' geeft een verdere invulling aan het rapport van de commissie Meijerink ten aanzien van taal en rekenen. Te downloaden op: *www.taalenrekenen.nl/referentiekader/rel_doc/nadere_beschouwing/Een_nadere_beschouwing-LR.pdf/*



Wiskunde werkt; reken maar!

EERSTE AANKONDIGING STUDIEDAG OP ZATERDAG 5 NOVEMBER 2011

[Henk van der Kooij]

Het wiskundeonderwijs lijkt, meer dan andere vakken, onderhevig aan continue aanpassingen en veranderingen.
Rekenen is een politiek speerpunt geworden, met landelijke rekentoetsen aan het eind van vmbo (2F) en havo/vwo (3F) in 2013/2014, en, als het aan de Onderwijsraad ligt, wordt er bij wiskunde, als kernvak, meer opbrengstgericht gewerkt liefst met tussentijdse toetsen. Daarnaast wordt de vernieuwing van de examenprogramma's voor havo/vwo door cTWO in lesmaterialen uitgewerkt en getest in pilotsscholen.
Het gekozen thema is breed; je kunt er veel in kwijt en dat is ook onze bedoeling.

Wiskunde werkt

Bij dit subthema valt te denken aan:

- Hoe krijg je doeners aan het denken? Veel vmbo leerlingen werken liever met de handen en voelen niet zozeer de behoefte aan wiskundig denken. Kan het denken worden gestimuleerd vanuit het doen?
- Wiskunde wordt gebruikt in bijna alle beroepen. Wat voor wiskunde heeft een loodgieter nodig, of een geoloog? Wiskunde werkt, zeker! Maar hoe? Is dat de wiskunde die zij op school hebben geleerd of ziet het er anders uit?
- Wiskunde die is ingebed in de beroepspraktijk lijkt een goede uitdaging voor het onderwijs in vmbo en havo.
- Werkt wiskunde ook binnen andere schoolvakken en hoe dan wel?
- Wat is effectief en efficiënt wiskundeonderwijs?
- Wiskunde met gebruik van ICT-middelen. Hoe werkt dat in de lespraktijk?

Reken maar

Uiteraard zijn hier veel bijdragen mogelijk:

- Rekenbeleid op de school. Hoe doet u dat? Wiskunde-lestijd, die toch al beperkt is, aan het rekenen besteden? Of toch maar liever in overleg met andere secties het rekenen spreiden over de vakken?
- Hoe wordt er gerekend bij de andere vakken? Procent-rekenen komt bij veel vakken voor, maar ieder vak lijkt zijn eigen aanpak te hebben.
- Hoe krijg je voor leerlingen meer herkenbaarheid in de verschillende vakken? Afstemming en samenhang zijn belangrijk, maar lukt dat ook in de praktijk?

Vakvernieuwing

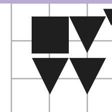
Uiteraard worden hier weer veel bijdragen vanuit cTWO verwacht, liefst met nieuws en ervaringen uit de pilotscholen. Wat wordt er vanaf 2015 nu zo anders en hoe moeten we de leerlingen in de onderbouw een verantwoorde keuze laten maken? En hoe zit het met de samenhang met de exacte vakken en economie?

Diversen

Uiteraard is bovenstaande opsomming niet uitputtend. Heeft u een idee voor een bijdrage, dan horen wij dat graag. Wij zullen gericht mensen vragen om een presentatie te verzorgen, maar wij roepen u ook op om een bijdrage te leveren aan het slagen van de studiedag.

Heeft u een idee?

Laat dat dan weten aan Henk van der Kooij met een e-mailbericht (*h.vanderkooij@uu.nl*).
Uiteraard hoe eerder hoe beter, maar in ieder geval **vóór 1 juli 2011**.



Kleine didactieken

VANUIT DE WERKGROEP HAVO/VWO

[Henk Rozenhart]

Inleiding

Naar aanleiding van de oproep van Peter Kop – gedaan op de afgelopen jaarvergadering – om voorbeelden van *kleine didactiek* en de wiskundige zaken die je daarbij gebruikt, te verzamelen, ben ik nog eens gaan zoeken in boeken van bekende didactici die mijn lesgeven hebben beïnvloed. Ik noem o.a. die van Van Dormolen, Van Hiele, Skemp en Mason. Waarschijnlijk zijn het er meer, maar deze vier staan wel centraal. Bij hen vind ik aanknopingspunten – waarom ik dingen doe zoals ik ze doe.

Wiskunde wordt door veel leerlingen, maar ook door collega's, gezien als een vak waarbij het gaat om het vinden van het juiste antwoord op een gesteld probleem. Dit is natuurlijk vaak wel de kern van het dagelijks bestaan. Er is een boek, er staan sommen in en die gaan we maken. Dat doen we dan goed of fout. Maar als je als docent het daarbij laat, doe je het vak wiskunde te kort.
Er is veel meer waaraan je met je leerlingen moet werken, als je ze iets over wiskunde wilt leren.

Vermoedens

Bijvoorbeeld het gegeven dat je een probleem wiskundig gezien op verschillende manieren kunt bekijken. Dat je verschillende paden kunt bewandelen op weg naar een oplossing, daarbij zijwegen kunt inslaan om tot een verbeterd inzicht te komen. Dit is een houding die je volgens mij bij leerlingen moet proberen aan te brengen als je met je lessen bezig bent. Het verzamelen van ideeën, het sorteren daarvan en vervolgens het beoordelen van die ideeën. Dat vraagt een onderzoekende houding. Een houding die er voor zorgt dat een leerling bereid is een vermoeden op te stellen en uit te spreken. En daarna bereid is zijn vermoeden bij te stellen of te verwerpen. De problemen waarvoor de kleine didactieken zijn bedoeld, zijn vooral open en hebben zeker de bedoeling om er op een heel open manier mee om te gaan. Praten met leerlingen over hoe zij tegen het gestelde probleem aankijken. Laten merken dat elk idee waardevol is en het verdient om nader beschouwd te worden. De vrees van de leerling dat iemand je idee belachelijk vindt wegnemen. Er voor zorgen dat leerlingen leren dat een probleem wat langer blijft liggen, dat er later op teruggekomen wordt, als we er dieper over nagedacht hebben.
Dat uit foute ideeën vaak betere voortkomen, dat wiskunde onderzoeken en vragenstellen is aan een ander en aan jezelf. Zorg voor een goede sfeer bij dit werk en het betaalt zich terug in meer zelfvertrouwen.

Scherp slijpen

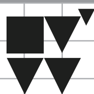
Wanneer een idee of een techniek voor de eerste keer bekeken wordt, is het vaak zo dat daarover niet meteen helder gesproken en gedacht kan worden. Er moet dus vooral veel aan beeldvorming gedaan worden. Probeer in je eigen woorden goed te omschrijven wat je ziet. Het vraagt vaak meerdere pogingen om tot een volledig beeld te komen als jezelf probeert op te schrijven waar iets over gaat. Zoek voorbeelden en tegenvoorbeelden die het probleem verduidelijken. Probeer vanuit dit soort werkzaamheden tot een generalisatie van het probleem te komen. Kun je bij een formule woorden bedenken en andersom? Kun je bij een plaatje in woorden omschrijven wat je ziet? Kun je ook een plaatje bedenken bij de woorden die je leest?

Zelfvertrouwen

Gebrek aan zelfvertrouwen is waarschijnlijk de belangrijkste oorzaak van falen. Vaak komt dat omdat een leerling denkt dat zijn ideeën niets voorstellen. Omdat zijn gedachten te chaotisch zijn. Omdat hij geremd is door het feit dat aan het ontwikkelen van zelfvertrouwen geen aandacht besteed is door middel van het werken aan open problemen waarbij de mening van een ieder van belang is om een concept te doorgronden. Heel vaak wordt bij een nieuw stuk leerstof het proces van ontdekken en wennen overgeslagen en vervangen door voordoen en nadoen zonder aandacht voor begripsvorming.
De kleine didactieken kunnen helpen in het bij een probleem of een nieuw stuk theorie herhaald doorlopen van de cyclus die er voor zorgt dat symbolen worden geproefd, de theorie wordt besnuffeld zodat je er vervolgens iets mee kunt doen. Vooral bij abstracte concepten is het van belang ook veel eenvoudige voorbeelden en tegenvoorbeelden te hebben die het concept duidelijk maken. Dan kan het van groot belang zijn eenvoudige woorden te hebben die het concept beschrijven, ontdaan van symbooltaal. En beelden te gebruiken die in één oogopslag duidelijk maken waar de tekst over gaat. En natuurlijk veel terugkijken naar wat er aan vooraf ging.

Verwachtingen

Het waarschijnlijk grootste probleem binnen wiskundeonderwijs is dat er vaak te weinig tijd is om nieuwe theorie



goed te doorgronden. Uitleggen, een paar voorbeelden en dan meteen aan het werk met sommen maken. Vaak leidt dat op korte termijn nog wel tot redelijke resultaten bij een proefwerk, maar op de lange termijn niet tot het beklijven van de theorie. Laat staan dat de theorie goed begrepen wordt en ingepast wordt in een grotere structuur. De druk van de tijd is altijd voelbaar. Nu mag je ook niet verwachten dat je moeilijke zaken na de eerste keer meteen beheerst.
Daarom is herhalen en terugkijken ook zo belangrijk. Maar het is van essentieel belang dat een leerling weet dat zijn docent zich bewust is van het feit dat het zo werkt. Voor de leerling lijkt het vaak wel of de docent het raar vindt dat hij het na twee keer oefenen nog niet kan. Net als de docent moet de leerling ook leren inzien dat iets vaak een kwestie van de lange adem is: veel oefenen en daarbij veel fout doen. Daarvan leren en dan later er weer op terug komen en proberen het begrip te vergroten. Dat het niet erg is als je wat langer doet over het echt begrijpen, maar dat dat wel iets is waar aan gewerkt moet worden.
Probeer redelijke verwachtingen te hebben over begrijpen en verwerken. Het echte begrip mag best wat op zich laten wachten. De grote lijn is als eerste van belang, de details komen later.
Goede voorbeelden zijn bij alles wat hierboven staat van het allergrootste belang. Open problemen die prikkelende vragen stellen aan leerlingen. Andere invalshoeken waardoor de theorie uiteindelijk beter begrepen wordt. Enzovoort.
Kleine didactieken kan een podium zijn om bovenstaande voor docenten makkelijker te maken.
Om bovenstaande toe te lichten volgt hierna een voorbeeld uit mijn eigen lespraktijk.
In de huidige onderwijspraktijk komt in 5-vwo de problematiek rond *bewijzen* aan de orde. De introductie via meetkunde die mijn boek geeft, overtuigt leerlingen er niet van dat dit nodig en nuttig is. Ik probeer – lang voordat dit aan de orde komt – met vragen die zich richten op inzicht in getaltheorie, een gevoel en een houding te kweken, die meer aansluiten bij een intrinsieke motivatie tot bewijzen.

Voorbeelden

Probleem 1
Zoals je weet is een breuk een deling van twee gehele getallen. Als je dit letterlijk opvat en de deling uitvoert, krijg je een decimale breuk. Een kommagetal dus.
Vraag: Hoe zit het met de decimale ontwikkeling van breuken?

- Onderzoek dit met je GR.

Kijk bijvoorbeeld naar het rijtje breuken:

$\frac{5}{8}, \frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{2}{9}, \frac{4}{7}, \frac{3}{11}, \frac{2}{15}$.

- Stel een vermoeden op over de decimale ontwikkeling van breuken.
- Hoe zit het met $\frac{2}{17}$? En hoe toon je aan dat je gelijk hebt?

De leerlingen gaan met dit probleem aan de slag in de klas en praten er met elkaar over. Vervolgens proberen we als klas een aantal uitspraken te doen. Het laatste voorbeeld is bij dit onderzoek natuurlijk de belangrijke stap voorwaarts. Met de GR kun je het niet zien, dus hoe zit dat nu.
De volgende les komen we er op terug en proberen tot een goede formulering te komen die een ieder snapt. Daarbij komt ook het deelalgoritme nog eens goed aan bod.

Probleem 2
We weten nu dat bij een breuk de decimale ontwikkeling twee vormen kent. Het breekt af en gaat daarna verder met oneindig veel nullen. Het gaat oneindig door achter de komma met een repeterend deel.
De enig overgebleven vorm is nu oneindig doorlopend achter de komma zonder dat het gaat repeteren.

- Wat voor soort getallen zijn dat?

We weten dat π zo'n getal is. Het is niet zo heel moeilijk om zelf zo'n getal te ontwerpen.

- Verzin zelf zo'n oneindige, niet-repeterende decimale breuk. Leg daarbij goed uit hoe je zeker weet dat het zo'n getal is.
- Hoe zit dat met een getal als $\sqrt{2}$?

Je weet dat $\sqrt{2}$ ongeveer 1,4142 is.

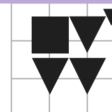
- Waarom is $\sqrt{2}$ niet precies gelijk aan 1,4142 ?
- Geef een redenatie waaruit blijkt dat $\sqrt{2}$ nooit een eindige decimale breuk kan zijn.

Het is een stuk lastiger om aan te tonen dat $\sqrt{2}$ niet een decimale breuk is met oneindig veel cijfers achter de komma en een repeterend deel.
Maar als je zeker weet dat $\sqrt{2}$ geen breuk is, moet het wel zo'n oneindige niet repeterende decimale breuk zijn, want meer mogelijkheden zijn er niet.
Bij het bewijs dat $\sqrt{2}$ zo'n getal is gaat men uit van de aanname dat $\sqrt{2}$ wel een breuk is en toont van daaruit een tegenspraak aan. Het bewijs wordt na veel heen en weer gepraat tijdens een les besproken en de leerlingen krijgen de opdracht dit voor de volgende keer op te schrijven.

Probleem 3
Bij probleem 2 hebben wij bewezen dat $\sqrt{2}$ een irrationaal getal is. Irrationaal wil zeggen niet-rationaal, dus niet te schrijven als een deling van twee gehele getallen.
Dat was nog knap lastig, want als je een vermoeden hebt dat iets waar is, wil het nog niet zeggen dat het dan ook zo is.
Je zult argumenten moeten bedenken, die onweerlegbaar zijn, om van een vermoeden een waarheid te maken. Zo zijn er in de wiskunde nog veel eenvoudig lijkende vermoedens, waarvan het bewijs nog steeds niet gevonden is. Hieronder worden er twee genoemd en worden er een paar vragen over gesteld.

Vermoeden 1 – Elk even getal groter dan 2 kan geschreven worden als de som van twee priemgetallen (een priemgetal mag hierbij twee keer gebruikt worden).

- Om welk vermoeden gaat het hier? Hoe oud is dit vermoeden al?
- Laat met een paar voorbeelden zien wat er bedoeld wordt.
- Hoe is de stand van zaken rond het bewijs van dit vermoeden?



Vermoeden 2 – Dit vermoeden wordt wel het $(3X + 1)$ - probleem genoemd.
De regels zijn eenvoudig:
Neem een willekeurig positief geheel getal.
Is het even dan deel je het door 2.
Is het oneven dan vermenigvuldig je met 3 en tel er dan nog 1 bij op.
Op het zo verkregen getal pas je bovenstaande regels weer toe. Blijf daarmee doorgaan.

- Probeer het eens uit.
- Wat valt je op en wat is je vermoeden?
- Bevestig je vermoeden met nog wat voorbeelden.
- Waar komt dit probleem vandaan?
- Hoe is de stand van zaken rond het bewijs van dit vermoeden?

Meer?
Het is slechts een korte schets hoe dit aan te pakken.
Er zijn meer vragen en meer voorbeelden te bedenken die kunnen helpen. Je kunt denken aan een aantal zaken rond priemgetallen. De stelling van Pythagoras, die de leerlingen kennen maar niet hebben bewezen, is ook een dankbaar onderwerp.
Hopelijk inspireert jullie dit tot het toesturen van jullie voorbeelden; voorbeelden waarvan jullie vinden dat ze een collega kunnen helpen bij het verduidelijken van de wiskunde in het schoolboek.

PUZZEL 86-6

Een kwadratisch attractiepunt

[Frits Göbel]

In deze aflevering van Recreatie onderzoeken we het gedrag van rijen natuurlijke getallen die je krijgt met het volgende recept:
- $a_1 = n$ (een willekeurig startpunt),
- a_j = het kleinste getal groter dan a_{j-1} dat deelbaar is door j ($j > 1$).

Als je $n = 1$ neemt, wordt de rij heel simpel 1, 2, 3, … Voor $n = 2$ wordt het ook niet erg interessant: 2, 4, 6, …
We nemen maar eens een wat groter startpunt: 308. De rij wordt dan:
308, 310, 312, 316, 320, 324, 329, 336, 342, 350, 352, 360, 364, 378, 390, 400, 408, 414, 418, 420, 441, …
En van hier af is de rij weer minder interessant, het wordt namelijk een rekenkundige rij met verschil 21. (Ga dit nog even na.)

We zien in deze rij een paar kwadraten: 324, 400 en 441, maar met 441 is er iets aparts aan de hand. Het merkwaardige is dat 441, de 21ste term, het kwadraat van 21 is. Dit geldt algemeen.

Opgave 1
Beschouw de rij gedefinieerd door $a_1 = n$ en a_j = het kleinste getal groter dan a_{j-1} dat deelbaar is door j ($j > 1$).
Dan is er een uniek getal k, afhankelijk van n, zó dat $a_k = k^2$. Bewijs dit.

Het getal k hangt in principe af van n, maar voor ieder begingetal tussen 92 en 109 komen we op 144 uit. Hier blijkt al dat het kwadraat niet op een eenvoudige manier van het begingetal kan afhangen. Maar er is wel een redelijke benadering te geven, gebaseerd op een enigszins dubieus stochastisch model.

Opgave 2
Laat zien dat, bij begingetal n, het kwadraat in de buurt van $4n/3$ ligt.

Hoe het ook zij, dit model levert ons nog een opgave.

Opgave 3
Laat x_k homogeen verdeeld zijn op $\{1, 2, \ldots, k\}$; $k = 1, 2, \ldots, n$. Laat deze variabelen onderling onafhankelijk zijn.
Bepaal de verwachting en de variantie van de som $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$.

Oplossingen kunt u mailen naar *a.gobel@wxs.nl* of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede.
Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen met uw oplossing.
De deadline is 5 juli. Veel plezier!

OPLOSSING 86-4

Shuffle-exchange graphs

Er waren slechts 19 inzenders, onder wie twee die moeite hadden om de definitie van SE_n meteen te vatten. Maar aan bijna alle inzenders kon ik 20 punten uitdelen. En ik kon me ook verheugen in veel positieve opmerkingen over de opgaven.

Opgave 1 – Als n niet deelbaar is door 4, zijn er geen S-cykels van 4 in SE_n; dit was eigenlijk al voorgezegd. Laat nu n deelbaar zijn door 4.
Het aantal S-cykels van 4 wordt dan bepaald door het aantal niet-periodieke bitrijen van de lengte 4, want dergelijke rijtjes komen na vier keer voor het eerst weer terug. Dat aantal is eenvoudig te vinden door uitschrijven, maar mooier is om 2^4 te verminderen met het aantal periodieke rijen van 4 bits. Er zijn er 4: twee met periode 1 en twee met periode 2. Er blijven 12 niet-periodieke over, en dat levert 12/4 = 3 cykels.
De bedoelde aantallen zijn dus 0 en 3.

Als je het op deze manier hebt gedaan, ben je al aardig op weg om *opgave 2* op te lossen.
Laat a_n het aantal niet-periodieke bitrijen van de lengte n zijn. Dan is $a_1 = 2$ en voor $n > 1$ geldt de volgende recursie:

$$a_n = 2^n - \sum_d a_d$$

waarbij gesommeerd wordt over alle delers d van n die kleiner dan n zijn.
Om a_{10} te bepalen, moeten we dus a_1, a_2 en a_5 kennen. Welnu, $a_2 = 2$ en $a_5 = 2^5 - 2 = 30$. We vinden dus:
$a_{10} = 1024 - 2 - 2 - 30 = 990$
Voor de cykels moeten we dit nog door 10 delen. Het antwoord is dus 99.
Twee inzenders hebben bij hun oplossing de 99 cykels afgedrukt. Ik heb ze niet nageteld!

Opgave 3 gaat over cykels waarin ook E-lijnen voorkomen. Twee opvolgende E-lijnen kan niet; dus in een cykel van 4 zitten om en om E-lijnen en S-lijnen.
Je kunt dit probleem aanpakken zowel met de binaire als met de decimale nummering van de punten. In het tweede geval kun je de cykel:
$x, x + 1, 2x + 2, 2x + 1, 4x + 2$
vinden met $n = 2k - 1$, $x = (4^k - 4)/3$.
Bijvoorbeeld: $n = 5$ met modulus 31, $k = 3$. Dan is dus $x = 20$ en de cykel is 20, 21, 42 = 11, 10, 20. In de binaire representatie wordt dit:
10100, 10101, 01011, 01010, 10100

Ladderstand
De top van de ladder:
J. Hanenberg 534
T. Kool 526
H. Linders 477
H. Bakker 443
K. Verhoeven 424
K. v.d. Straaten 404
W. v.d. Camp 402
H.J. Brascamp 352
J. Remijn 344
J. Verbakel 321
L. de Rooij 320
R. Stolwijk 272

SERVICEPAGINA

Publicaties van de Nederlande Vereniging van Wiskundeleraren



Zebraboekjes

1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christiaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde
21. Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde
22. Spelen en Delen
23. Experimenteren met kansen
24. Gravitatie
25. Blik op Oneindig
26. Een Koele Blik op Waarheid
27. Kunst en Wiskunde
28. Voorspellen met Modellen
29. Getallenbrouwerij
30. Passen en Meten met Cirkels
31. Meester Ludolphs Koordenvierhoek

Zie verder ook *www.nvvw.nl/page.php?id=7451* en/of *www.epsilon-uitgaven.nl*

Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo

Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

Honderd jaar wiskundeonderwijs, lustrumboek van de NVvW

Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW: *www.nvvw.nl/page.php?id=1779*
Voor overige NVvW-publicaties zie de website: *www.nvvw.nl/page.php?id=7450*

Voor overige internet-adressen zie ***www.wiskundepersdienst.nl/agenda.php***

Voor Wiskundeonderwijs Webwijzer zie ***www.wiskundeonderwijs.nl***

Kalender

In de kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo vroeg mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur, het liefst via e-mail (*redactie-euclides@nvvw.nl*). Hieronder vindt u de verschijningsdata van Euclides in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdatum is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de *eind*versies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook *www.nvvw.nl/euclricht.html.*

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
7	28 juni 2011	3 mei 2011

jaargang 87

1	13 september 2011	19 jul 2011
2	25 oktober 2011	30 aug 2011
3	20 december 2011	25 okt 2011

wo. 18 t/m do. 26 mei, op de scholen
Centrale Examens wiskunde
Organisatie CvE
Zie pag. 205 in *Euclides* 86(5).

vrijdag 20 mei, diverse locaties
Regionale examenbespreking vwo B
aanvang 16:00 uur
Organisatie NVvW

maandag 23 mei, diverse locaties
Regionale examenbespreking havo B
aanvang 16:00 uur
Organisatie NVvW

maandag 23 mei, Utrecht
Bijeenkomst: Hoogbegaafde leerlingen in de wiskundeles
Organisatie APS

woensdag 25 mei, Jaarbeurs Utrecht
Centrale examenbespreking vmbo TGK
aanvang 16:00 uur
Organisatie NVvW

donderdag 26 mei, diverse locaties
Regionale examenbespreking vwo A en C
aanvang 15:30 uur
Organisatie NVvW

vrijdag 27 mei, diverse locaties
Regionale examenbespreking havo A
aanvang 16:00 uur
Organisatie NVvW

woensdag 1 juni, Utrecht
Wiskunde D-dag
Organisatie cTWO

maandag 6 juni, Utrecht
Studiemiddag: Rekenbeleid bij u op school
Organisatie APS

vrijdag 10 juni, Utrecht
Bèta onder de Dom
Organisatie Bètasteunpunt Utrecht

wo. 13 t/m zo. 24 juli, Amsterdam
52e Internationale Wiskunde Olympiade (IMO 2011)
Organisatie Stichting IMO2011

vrijdag 23 september, Nijmegen
Wiskundetoernooi 2011
Organisatie Radboud Universiteit

zaterdag 5 november
Jaarvergadering/Studiedag NVvW
Organisatie NVvW

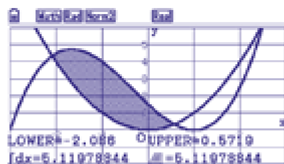
CASIO *fx*-CG20: Kleurrijke wiskunde!

De *fx*-CG20 van CASIO is de eerste van een nieuwe generatie grafische rekenmachines, die dankzij zijn hogeresolutie LCD-kleurenscherm en uitgebreide functionaliteit de ideale studiegenoot is voor iedere scholier of wiskundestudent.

De *fx*-CG20 van CASIO biedt als eerste ter wereld de functie 'Picture Plot' waarmee de gebruiker grafieken en curven over andere beelden heen kan plotten, zoals een parabool over de waterstralen van een fontein. Studenten kunnen experimenteren met het creëren van hun eigen grafieken over foto's heen. Vervolgens leren ze van de functies van deze zelfgemaakte grafieken. Grafieken die in kleur bovendien een stuk gemakkelijker te overzien zijn. Het hogeresolutie LCD-kleurenscherm toont alle beeldmateriaal in 65.000 kleuren en biedt daarmee dezelfde weergave als in een studieboek. De *fx*-CG20 introduceert een geheel nieuwe en meer intuïtieve manier van wiskunde leren.

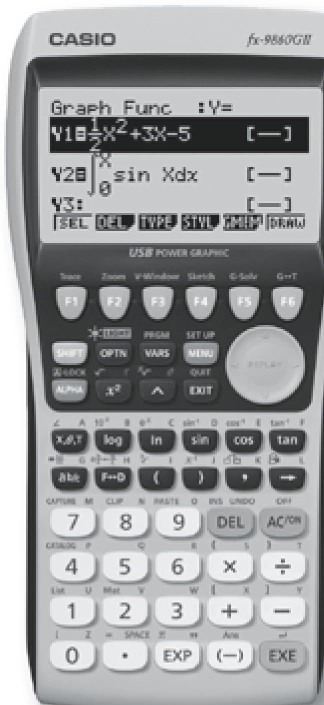
Bekijk het in kleur op www.casio-educatie.nl





CASIO: betrouwbaar als de uitkomst zelf!

Op de Natural Textbook Display worden o.a. breuken en wortels weergegeven als in het leerboek. De *fx*-82ES Plus is ook geschikt voor het gebruik van tabellen.



CASIO *fx*-9860GII

Rekengemak: de grafische rekenmachine *fx*-9860GII met groot contrastrijk display met natuurlijke invoer en uitvoer, achtergrondverlichting en 1,5 MB Flash-ROM-geheugen.



CASIO *fx*-82ES PLUS

Geniale oplossing: de technisch-wetenschappelijke zakrekenmachine *fx*-82ES Plus met natuurlijke invoer- en uitvoerfunctie, en met puntmatrixscherm zorgt voor meer begrip tijdens het onderwijs.

3 jaar garantie

Bestel uw speciaal geprijsde docentenexemplaar van de nieuwe CASIO *fx*-CG20 via e-mail educatie@casio.nl

CASIO. dé nummer 1 in rekenmachines voor het onderwijs.

Casio Benelux B.V. - Tel: 020 545 10 70 - educatie@casio.nl - www.casio-educatie.nl